PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 15. Mai 1921. 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 12 am 24. Mai 1921.

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Greinacher, Aus der Ionenlehre der Gase. II. Mitteilung. S. 289.

H. Greinacher, Aus der Ionenlehre der Gase. III. Mitteilung. S. 294.

P. Ludewig, Das Trop'-Emanoskop. Eine Anordnung zur schnellen Bestimmung des Emanationsgehaltes radioaktiver Wässer. S. 298.

P. Debye, Molekularkräfte und ihre elektrische Deutung. S. 302.

A. Kopff, Über den Einfluß von Sonne und Mond auf das Zentrifugalfeld der Erde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. S. 309.

K. Wessely, Bemerkung zu den Grundlagen der Relativitätstheorie. II. S. 310.

H. Schwerdt, Ein einfaches Ausgleichungsverfahren für parabolische Funktionen zweiten und dritten Grades. S. 312.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

W. Porstmann, Untersuchungen über Aufbau und Zusammenschluß der Maßsysteme. S. 315.

Inspektion für Waffen und Gerät, Bemerkung zu „Zur Verwertung des Spiegelbildes in der Photogrammetrie. S. 320.

Berichtigung. S. 320.

Tagesereignisse. S. 320.

Personalien. S. 320.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Aus der Ionenlehre der Gase.

Einige Demonstrationsversuche.

II. Mitteilung[1]).

Von H. Greinacher.

§ 1. Townsends Kurve der Stoßionisierung.

Die Stromspannungscharakteristik eines ionisierten Gases besteht im allgemeinen aus zwei wohlgetrennten Teilen. Einem ersten, der bis zur „Sättigungsstromstärke" anwächst und einem zweiten, der bei hohen Feldern ein rasches Wiederansteigen des Stromes infolge der eintretenden Stoßionisierung zeigt. Will man diesen zweiten Teil, die Townsendsche Kurve, demonstrieren, so wählt man etwa eine lichtelektrische Zelle mit verdünntem Gas, da hier die Erscheinung bei viel kleineren Spannungen als bei Atmosphärendruck zu erhalten ist. Wie im folgenden gezeigt werden soll, läßt sich die Townsendsche Kurve aber auch in freier Atmosphäre ohne allzu hohe Spannungen unter übersichtlichen Bedingungen aufnehmen.

Eine frisch geschmirgelte *Zn*-Platte (10 cm Durchmesser) wird durch eine *Hg*-Quarzlampe aus kleinem Abstand (25 cm) bestrahlt. Vor die Zinkplatte wird eine Nähnadel unter einem Winkel von 45° befestigt, so daß die Spitze der Mitte der Scheibe in $1^1/_2$ bis 2 cm Entfernung gegenübersteht. Die etwa an Siegellack befestigte Nadel ist mit einer Gleichstromquelle von 0—3000 Volt verbunden. Besonders bequem ist ein an die Lichtleitung ansteckbarer Gleichrichter, wie früher beschrieben[2]). Die Spannung wird mit einem Braunschen Elektrometer gemessen. Die *Zn*-Scheibe ist über ein Drehspulgalvanometer (Empfindlichkeit $3 \cdot 10^{-10}$ Amp/mm) mit der Erde verbunden. Wird an die Nadel positive Spannung angelegt, so wandern die aus der *Zn*-Platte austretenden Elektronen (nachdem sie sich mit den Gasmolekülen zu negativen Ionen verbunden haben) an diese. Bei dieser Anordnung wird man

1. infolge der großen Platte einen intensiven Sättigungsstrom und

2. infolge des großen Feldes an der Spitze schon bei relativ kleinen Spannungen Stoßionisierung bekommen.

Damit man nur die Stoßionisierung durch die lichtelektrischen Ionen erhält, darf die Spannung nicht bis zur selbständigen Spitzenentladung gesteigert werden, d. h. bei Abdecken des Lichts muß der Galvanometerausschlag stets auf Null zurückgehen. Mit dem Einsetzen des Spitzenstroms wächst zwar der Ausschlag weiter, allein die Differenz mit und ohne Belichtung nimmt nicht mehr weiter zu.

Die beiden Kurven der Fig. 1 geben etwa ein Bild der Verhältnisse[1]). Man erkennt zunächst ein Anwachsen des Stromes bis zu einem Sättigungsstadium, wobei die Größe dieses Sättigungsstroms von der vorangegangenen Behandlung der *Zn*-Oberfläche abhängt. Sodann beginnt der Strom (bei zirka 2000 Volt) erst langsam, dann immer rascher zu wachsen (Townsendsche Kurve), bis in der Gegend von 3000 Volt dann die selbständige Entladung einsetzt (siehe die beiden letzten Punkte der Kurve II). Die Kurven sind mit steigenden Spannungen auf-

1) Fortsetzung der früheren Mitteilung. Diese Zeitschr. 19, 188, 1918.

2) Diese Zeitschr. 17, 343, 1916. Bulletin des Schweiz. Elektrot. Vereins 11, 59, 1920.

1) Ein Teil der in §§ 1—4 mitgeteilten Messungen ist mir in dankenswerter Weise von Teilnehmern am radiologischen Praktikum ausgeführt worden.

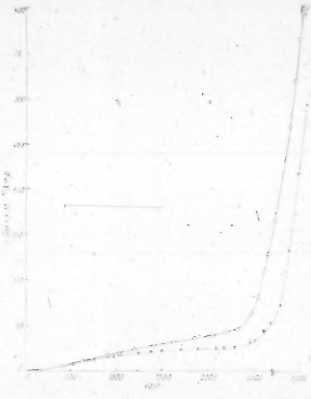


Fig. 1.

genommen. In Wirklichkeit würden sie, wenn keine Ermüdung des *Zn* vorhanden wäre, noch etwas steiler verlaufen. Es empfiehlt sich zur Vermeidung eines großen Ermüdungseffektes, die Versuchsreihe in kurzer Zeit durchzuführen.

Ein Versuch, bei dem an die Spitze negative Spannung angelegt wurde, zeigte, daß sowohl vor als nach Einsetzen der Spitzenentladung kein Lichteffekt vorhanden war.

Daß der Photoeffekt die primären Ionen liefert, ließ sich gut zeigen, indem man an die *Zn*-Scheibe eine Pappscheibe oder ein *Cu*-blech (mit alter Oberfläche) hängte, so daß das *Zn* durch anderes unwirksames Material verdeckt war. Man erhielt bei

2700 Volt mit	*Zn*	durch	Belichtung	130 mm
„	Pappe	„	„	2 „
„	*Cu*	„	„	2 „
wieder „	*Zn*	„	„	120 „ .

Mit der angegebenen Anordnung ließ sich noch folgendes beobachten. Man erhielt bei Anlegen von + 3100 Volt, wobei hier ohne Belichtung kein merklicher Ausschlag erfolgte

	(mit Belichtung)
Zn (nicht ganz frisch)	180 mm
Zigarettenrauch zwischen den Elektroden	80 „
Rauch weggeblasen	135 „
wieder mit Rauch	75 „
Nach einiger Zeit	100 „
Beim Anhauchen (feuchte Luft) Vergrößerung auf	130 „
Zn (frisch geschmirgelt) . . .	325 „
Schwacher Leuchtgasstrom an der Spitze	425 „
Luft	235 „
Leuchtgas	365 „ .

§ 2. Minimumpotential der Spitzenentladung.

Zur Demonstration wurden zwei gleiche Nähnadeln verwendet, wovon die eine nicht weiter bearbeitet, die andere auf dem Ölstein noch etwas spitzer geschliffen war. Um abwechselnd die eine und andere Spitze verwenden zu können, waren die beiden Nadeln diametral an einem als Drehachse dienenden Metallstift so befestigt und justiert, daß die Spitzen gleich weit von der Achse abstanden (etwa 3 cm). Der Metallstift konnte in ein unten geschlossenes Glasröhrchen gesteckt werden, das als Führung und isolierende Hülse diente und an einem Stativ befestigt war. Einige Windungen blanken Drahtes um den aus dem Glasröhrchen herausragenden Teil des Metallstiftes bildeten die Stromzuleitung. Eine Messingplatte von 37 mm Durchmesser wurde als zweite Elektrode verwendet und die eine Spitze der Plattenmitte gegenübergestellt. Durch Drehen des Stiftes um 180° konnten die Spitzen bei gleichbleibendem Plattenabstand ausgewechselt werden. An die Platte wurde die variable Gleichspannung des Gleichrichters angelegt, während die Spitze über das Galvanometer (Empf. $3 \cdot 10^{-9}$ Amp/mm) mit Erde verbunden war. An einem mit der Platte verbundenen Braunschen Elektrometer konnten nun die Spannungen abgelesen werden, bei denen der Galvanometerausschlag merklich einsetzte. Die Resultate für die beiden Spitzen (*A* nicht behandelt, *B* geschärft, Plattenabstand: 1 cm), waren folgende:

Volt an *A*	Ausschlag mm	Volt an *B*	Ausschlag mm
+ 3700	1	+ 2300	0
+ 3800	64	**+ 2700**	15
— 3000	2	+ 2800	43
— 3300	4	— 1500	0
— 3400	11	— 1700	2
— 3500	22	**— 1800**	22

Die fettgedruckten Werte bezeichnen die Spannungen, bei denen die Ausschläge rasch zu wachsen beginnen. In Wirklichkeit sind die Werte für das Minimumpotential etwas kleiner und sind exakt nur mit noch empfindlicherem Galvanometer oder noch besser durch Extrapolation aus der Stromspannungskurve zu bestimmen. Die Demonstration zeigt aber deutlich den Unterschied zwischen positivem und negativem Minimumpotential und dessen Abhängigkeit von der Schärfe der Spitze. Kleinere Werte erhält man bei kleinerem Elektrodenabstand.

Die Abhängigkeit vom Gas wurde in folgender Weise gezeigt. Unter die Spitze (*B*) wurde

in 3 cm Entfernung die Mündung eines Glasrohrs gebracht. Unter langsamem Ausströmenlassen von Leuchtgas wurde nun das Potential soweit gesteigert, als es ohne Eintreten eines Galvanometerausschlages möglich war. Dieses betrug bei positiver Spitze + 3200 Volt, bei negativer Spitze — 2300 Volt. Wurde das Leuchtgas abgestellt, so stellte sich nach sehr kurzer Zeit ein beträchtlicher Ausschlag ein (zirka 60 mm, bzw. 130—140 mm), der sofort wieder verschwand, wenn das Leuchtgas austrat. Das Minimumpotential liegt also in letzterem Fall höher.

Entsprechend dem Unterschied zwischen dem M.P. für + und — Spitze, muß bei Anlegen einer Wechselspannung ein Gleichrichtereffekt auftreten. So erhielt man mit Spitze A bei einem Abstand von $^1/_2$ cm, wenn 2500 Volt Wechselstrom angelegt wurden, über 200 mm und bei 2700 Volt über 300 mm Ausschlag. Hierbei floß die Gleichstromkomponente, wie zu erwarten, von der Platte zur Spitze.

§ 3. Ionen im Spitzenstrom.

Der Spitzenstrom wird, wenn man von der nächsten Umgebung der Spitze absieht, von Ionen eines Vorzeichens getragen. Die Ladung dieser Ionen läßt sich in folgender Weise zeigen. Man wählt etwa die bereits beschriebene Anordnung und bläst die Ionen mittelst eines ausgezogenen Glasrohrs (Weite der Mündung zirka 3 mm) aus ihrer Bahn heraus in einen hohlzylinderförmigen oder konisch geformten Kollektor C hinein (Fig. 2). Letzterer kann in einfachster Weise aus einem entsprechend gerollten Stück Papier bestehen (z. B. Länge 20 cm, Durchmesser 8 bzw. 1 bis 2 cm). An diesem ist ein Korkstückchen angekittet, um den Kollektor mittels eines hineingesteckten Drahtes auf das Braunsche Elektrometer aufsetzen zu können. Ein Papierstreifchen, das einerseits am Papierkonus, andererseits am Metalldraht angeklebt ist, bewerkstelligt den elektrischen Kontakt zwischen Papier und Elektrometer. Vergleichende Versuche mit Metallkonus und Metallzuleitung, die die gleichen Resultate gaben, erwiesen die Brauchbarkeit dieser einfachen Anordnung.

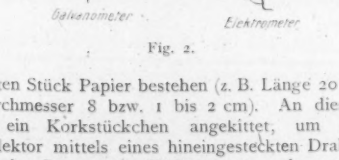


Fig. 2.

Blies man mittels eines Tretblasebalges einen kräftigen Luftstrom zwischen Spitze und Platte (etwa in der Mitte) hindurch in den Kollektor hinein, so begann das Elektrometer sich aufzuladen. Die Größe der Endaufladung variierte im einzelnen, je nach der Zentrierung und Stärke des Luftstromes. Indessen war es ein Leichtes, enorme Aufladepotentiale von mehr als 1000 Volt zu erhalten. Es wurden beispielsweise folgende Werte gemessen:

Abstand Spitze—Platte 1 cm	Volt	Strom Spitze—Platte mm Ausschlag	Aufladepotential Volt
	+ 4400	180	+ 2200
	+ 4500	210	+ 1200
	— 3300	220	— 3500
	— 3400	250	— 2000

Auf dem Kollektor hatte sich also eine gewaltige Ionenladung abgesetzt. Der Endzustand wird dann erreicht, wenn der Luftstrom die Ionen nicht mehr gegen das verzögernde Feld, das sich am Kollektor ausbildet, antreiben kann. Über die Größenordnung der Luftstromgeschwindigkeit, um z. B. 3000 Volt Aufladung zu erhalten, gibt folgende einfache Überschlagsrechnung Aufschluß. Nimmt man vereinfachenderweise an, das Feld zwischen Kollektor und Spitze sei räumlich konstant, so ist beim Endzustand die durch den Luftstrom bewirkte Ionengeschwindigkeit $v = u\left(\frac{V}{a}\right)$, wo u die Ionenbeweglichkeit ist. Setzt man für diese etwa 1,3, so kommt für unseren Fall $v = 1{,}3\,\frac{3000}{10} = 400$ cm/sec. Da der Luftstrom eine etwas größere Geschwindigkeit als die von ihm mitgerissenen Ionen hat, so muß er also eine Geschwindigkeit von über 4 m/sec haben. Nach der gemachten Überlegung ist es günstig, den Abstand Kollektor—Spitze möglichst groß zu machen. Indessen sind der Vergrößerung durch die Abnahme der Luftstromgeschwindigkeit mit der Entfernung Grenzen gesetzt. Im übrigen müßte das Aufladepotential dasselbe sein, wenn das Elektrometer noch mit einer (gut isolierenden) Leidener Flasche verbunden würde. Nur würde es nicht nach Bruchteilen einer Minute wie oben, sondern erst nach längerer Zeit erreicht.

Es ist nur ein kleiner Bruchteil des Spitzenstroms, der zur Seite geblasen wird. Denn am Galvanometer beobachtet man während des Blasens keine Stromabnahme. Im Gegenteil ist dann der Spitzenstrom, vielleicht infolge der Saugwirkung des Luftstroms an der Spitze (Luftverdünnung oder Entfernung des dort chemisch veränderten Gases?) merklich größer

Es ist für den Versuch wesentlich, daß man die Spannung an die Platte anlegt, während die Spitze mit Erde verbunden ist. Das Aufladepotential ist dann von entgegengesetztem Vorzeichen wie das der angelegten Spannung. Es ist also ausgeschlossen, daß etwa einfach ein Potentialausgleich zwischen Platte und Kollektor durch Ionenwanderung stattgefunden habe. Das bemerkenswerte Resultat, daß man z. B. bei Anlegung hoher positiver Spannung an die Platte eine hohe negative Aufladung am Elekrometer bekommt, läßt sich in überzeugender Weise so demonstrieren. Man bringt (etwa an einem isolierenden Griff befestigt) ein radioaktives Präparat zwischen Platte und Kollektor (bei A Fig. 2). Der Elektrometerausschlag geht allmählich auf Null zurück und fängt dann aber wieder zu wachsen an, bis sein Potential sich mit dem der Platte praktisch ausgeglichen hat.

Es ist klar, daß unsere obige Überlegung über die Größe des nötigen Luftstroms noch zu einem höheren Resultat führen muß. Denn die Ionen kommen nicht wie oben angenommen aus Stellen mit dem Potential Null, sondern müssen von solchen mit positiven Potentialwerten (Platte) zu negativen (Kollektor) und umgekehrt transportiert werden.

§ 4. Aufladung durch Thermionen.

Mit Thermionen lassen sich in ähnlicher Weise wie mit Spitzenstromionen bedeutende Aufladepotentiale erzielen. Die Resultate erscheinen hier vielleicht noch bemerkenswerter, als die Ionen nicht wie beim Spitzenstrom aus hohen Feldern stammen, wo die Aufladepotentiale von der Größenordnung der Elektrodenspannungen sind.

Die hohen Temperaturen lassen sich bequem durch den elektrischen Lichtbogen erzeugen. Zwei gewöhnliche Bogenkohlen seien vertikal angebracht. Die untere sei mit dem Gehäuse eines Braunschen Elektrometers und der Erde verbunden. Der Bogen werde mit 150—200 Volt Gleichstrom gespeist. Nachdem die Kohlen etwa 2 cm auseinandergezogen sind und sich genügend erhitzt haben, bläst man in horizontaler Richtung einen Luftstrom zwischen den Kohlen hindurch. Der Bogen löscht sofort, und jetzt werden die von den glühenden Kohlenenden abgegebenen Ionen mitgerissen und können wiederum im Hohlkonus, der auf dem Braunschen Elektrometer steckt, aufgefangen werden. Die Abstände können im übrigen ähnlich gewählt werden wie bei dem früheren Versuch mit Spitzenstrom. Um den Versuch sauber auszuführen, wird man während des Ausblasens des Lichtbogens ein Kartonblatt vor den Kollektor halten und dann wegnehmen. Man wird so die Lichtbogenionen fernhalten.

Da man hier Thermionen beiderlei Vorzeichens in wechselndem Verhältnis je nach der Temperatur der Kohlenenden hat, so kann das Aufladepotential, je nach den Versuchsbedingungen, positiv oder negativ und verschieden hoch ausfallen. Es ist, um übersichtliche Verhältnisse zu haben, zweckmäßig, relativ großen Kohlenabstand zu nehmen und den Luftstrom möglichst nur an der einen Kohle vorbeizuführen. Denn selbst bei gleicher Temperatur der oberen und unteren Elektrode wird das Vorzeichen der emittierten Ionen je nach dem Vorzeichen des an den Kohlen anliegenden Batteriepoles verschieden sein. So wurden z. B. für den Fall, daß die obere Kohle C_1 mit der Batteriespannung verbunden war und der Luftstrom an dieser vorbeigeblasen wurde, folgende Werte gefunden. War C_1 auf -150 Volt, so stieg das Aufladepotential erst auf -900 Volt, um dann während des Erkaltens der Kohle auf 300—500 Volt abzunehmen. Ein zweites Mal wurde maximal -1000 Volt und eine Endaufladung von -450 Volt gefunden. Wurde der Luftstrom im geeigneten Moment vom Kollektor abgeschnitten, so blieb das Elektrometer auf dem Höchstausschlag stehen (bei einem Versuch -900 Volt). Bei einem weiteren Versuch wurde die Spannung an C_1 sofort nach Auslöschen des Lichtbogens kommutiert. Das Aufladepotential stieg jetzt auf $+700$ Volt, welchen Wert es auch bei fortgesetztem Blasen beibehielt! Hieraus geht hervor, daß das Vorzeichen der Aufladung nicht davon abhängt, welches Vorzeichen die Kohle während des Lichtbogens hat. Jedoch wird das Vorzeichen der abgegebenen Thermionen vornehmlich die gleiche Polarität wie die der erhitzten Kohlen haben. Immerhin ist bei negativem C_1 zu erkennen, daß erst vorwiegend Elektronen abgegeben werden, daß aber mit der Abkühlung der Kohle schließlich durch positive Ionen die Aufladung des Elektrometers teilweise wieder neutralisiert wird. Verbindet man beide Kohlen nach Auslöschen des Bogens mit Erde, so bleiben die Ionen an den Kohlen sitzen und werden vom Luftstrom nur in geringerem Maße erfaßt. Die Aufladung ist dementsprechend klein.

Die Versuche zeigen, daß der Luftstrom eine gewisse Arbeit durch Ionentransport leistet. Natürlich kann dies nur auf Kosten der Bremsung des Luftstroms durch die mitgeführten Ionen der Fall sein, ein Effekt, der sich indessen wegen seiner Kleinheit dem experimentellen Nachweis entziehen wird. Will man umgekehrt die ponderomotorische Wirkung wandernder

Ionen nachweisen, so wird man etwa eine der in der ersten Veröffentlichung (l. c.) oder neuerdings von V. F. Hess[1]) angegebenen Versuchsanordnungen benützen.

§ 5. Lichtelektrische Ionen.

Es liegt nahe, die beschriebene Versuchsanordnung auch für lichtelektrische Ionen anzuwenden. Man stellt einer *Zn*-Scheibe (10 cm Durchmesser) in $1\frac{1}{2}$—2 cm Abstand ein ebenso großes Drahtnetz gegenüber und bestrahlt durch dieses Drahtnetz mit einer Quarz-*Hg*-Lampe aus zirka 20 cm Abstand. Zwischen *Zn* und Drahtnetz erzeugt man durch Anlegen von 100 Volt Spannungsdifferenz einen lichtelektrischen Strom. Die Spannung wird in einfachster Weise dadurch gewonnen, daß man gleichzeitig die zur Speisung der Quarzlampe verwendete Stromquelle verwendet. Die *Zn*-Platte ist mit dem negativen Pol und (womöglich) gleichzeitig mit Erde, das Drahtnetz mit dem positiven Pol, und zwar zum Schutz gegen Kurzschluß über eine Glühlampe verbunden. Nun kann man die Ionen wiederum seitlich herausblasen und im Kollektorkonus auffangen. Man verwendet hierzu das gleiche Glasröhrchen wie oben, dessen Mündung 1—2 cm in den Elektrodenzwischenraum hineinrage und ungefähr auf die Mitte des Zwischenraums gerichtet sei. Da die Aufladung infolge des relativ kleinen Photostromes nur allmählich erfolgt, kann man mit Vorteil das Blaseröhrchen statt mit einem Blasebalg mit Kohlensäure aus einer Bombe betreiben. Man erhält dann einen sehr regelmäßigen Anstieg des Aufladepotentials wie etwa Kurve Fig. 3 illustrieren möge. Wie hieraus zu ersehen, erzielt man leicht Aufladungen von

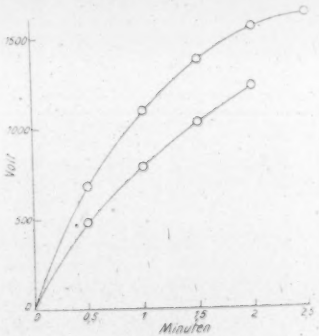


Fig. 3.

1) V. F. Hess, diese Zeitschr. **21**, 510, 1920.

weit über — 1000 Volt, wobei die Ionen wiederum wie oben, aus einem Raum mit positivem Potential stammen. Kontrollversuche zeigen, daß man ohne Belichtung nichts bekommt. Auch bleibt der Effekt aus, wenn kein Feld oder ein entgegengesetztes zwischen *Zn* und Drahtnetz vorhanden ist. Der Versuch bildet in gewisser Hinsicht die Fortführung eines früher beschriebenen (l. c.), dessen Priorität, wie mir nachträglich bekannt wurde[1]), und wie ich hiermit gern hervorhebe, Hallwachs gebührt[2]).

Mit der neuen Anordnung gelingt es, die dort erreichten Aufladepotentiale (zirka 100 Volt) noch um mehr als das 10-fache zu übertreffen[3]). Immerhin wird man stets gern auch den ursprünglichen, durch besondere Einfachheit ausgezeichneten Versuch zur Demonstration heranziehen.

§ 6. Metallionen in Flammengasen.

Verdampft man Salze der Alkalien und Erdalkalien in der Bunsenflamme, so wird deren Leitfähigkeit in bekannter Weise erhöht. Das Vorhandensein der durch Dissoziation gebildeten Metallionen läßt sich unter geeigneten Bedingungen etwa an der Ablenkung des leuchtenden Metalldampfs im elektrischen Felde zeigen. Überzeugender scheint mir der Nachweis zu sein, daß man die Ionen aus der Flamme herausziehen und durch Abscheidung auf einer Elektrode sichtbar machen kann. da Andrade[4]) beschreibt gelegentlich seiner Versuche über die Natur und Beweglichkeit der Flammenionen eine ähnliche Anordnung. In besonders einfacher Weise läßt sich der Metallionentransport auf folgende Weise zeigen. Man bringt eine Bunsenflamme zwischen zwei vertikale *Pt*-Drahtelektroden. Die dünnen Drähtchen, die beispielsweise 0,15 mm Durchmesser und $2\frac{1}{2}$ cm Länge haben sollen, befinden sich je 1 cm vom Flammensaum entfernt. Die eine Elektrode sei mit einer Spannungsquelle von 2500 oder mehr Volt, zweckmäßig mit dem mehrfach erwähnten Gleichrichter verbunden, die andere führe zur Erde, wobei man etwa zur Kontrolle des Stroms ein Galvanometer ($3 \cdot 10^{-9}$ Amp/mm) einschalte. Letzteres ist indessen nicht unerläßlich. Zur Vermeidung von Zweigströmen sei der Brenner

1) Hallwachs, diese Zeitschr. **21**, 102, 1920.
2) Hallwachs, Wied. Ann. **40**, 343, 1890.
3) Läßt man den Luftstrom nicht in einen Hohlkollektor, sondern gegen eine Kollektorplatte blasen, so erhält man auch hier nur Aufladepotentiale von der Größenordnung 100 Volt. Zur Not kann man als Auffänger ein Drahtnetz verwenden. Hier wurden immerhin einige hundert Volt beobachtet.
4) C. da Andrade, Phil. Mag. (6) **23**, 865, 1912, § 7—8.

auf eine isolierende Unterlage (Paraffin) gestellt.

Man glüht nun die beiden Drähte zunächst im Bunsenbrenner aus. Hierauf stellt man diesen zwischen die Drähte und färbt die Flamme durch eine *Na*-Salzperle kräftig gelb, während man zugleich für eine halbe Minute die Spannung anlegt. Nach Abschalten derselben und Entfernen der Salzperle glüht man nun sukzessive die beiden *Pt*-Elektroden wieder aus. An der Kathode wird die Flamme sich für kurze Zeit lebhaft gelb färben, während auch an der Anode Gelbfärbung, wenn auch in viel schwächerem Grade, auftritt (Verdunkeln!). Bringt man die *Na*-Perle in die Flamme, ohne Spannung anzulegen, so beobachtet man keine Abscheidung an den Elektroden. Der Versuch kann mühelos beliebig oft wiederholt werden. Er zeigt, daß der Hauptsache nach positive Metallionen, aber infolge der Umladungserscheinungen in der Flamme auch eine gewisse Menge negativer Ionen vorhanden sind.

Macht man das Experiment, indem man zwar die Spannung einschaltet, aber keine *Na*-Salzperle einführt, so erhält man meist ebenfalls schwache Gelbfärbung beim Ausglühen, wohl infolge des fast stets vorhandenen *Na*-Gehaltes der Bunsenflamme (Staub).

Im übrigen ließ sich beobachten, daß mit der Stromdauer und der Spannung (bis 6000 Volt) der Effekt stärker wird (Faradaysche Gesetze?).

Analog wie *Na*-Salz verhielten sich *Sr*, *Li* und *Ba*. *Sr* und *Li* sind besonders demonstrativ. Auch hier leuchtet die Kathode stark, die Anode merklich[1]). Mit *Ba* wurde nur an der Kathode eine schwache grüne Färbung erzielt. Der mit dem Massentransport verbundene Ladungstransport war jeweilen durch die Vergrößerung des Galvanometerausschlags beim Einbringen der Salzperle zu konstatieren.

Die Veränderung, die an den *Pt*-Elektroden durch Ionenwanderung eintritt, läßt sich auch durch das Auftreten einer Polarisation nachweisen. Statt des Ausglühens nach dem Stromdurchgang taucht man die Drähte in einen Becher Wasser. Es waren Polarisationsausschläge von der Größenordnung von 100 mm zu beobachten, die indessen rasch zurückgingen. Inwiefern für das Auftreten einer Polarisation etwa auch andere Ionen (*H*?) in Betracht kommen, muß hier dahingestellt bleiben.

Es liegt nahe, die Methode etwa auch zur Feststellung von Ionen anderer Elemente zu versuchen. Aussicht hierzu kann sich allerdings nur in denjenigen Fällen bieten, wo bei Verdampfen der Substanz zugleich eine Leitfähigkeitserhöhung eintritt. Ich habe einen solchen Versuch mit Joddampf gemacht. Dies speziell darum, weil man, wie ich seinerzeit schon mitgeteilt habe[1]), hier eine ähnliche Leitfähigkeitserhöhung wie mit Alkalisalzen erhält. Das Resultat war indes ein negatives. Zugleich zeigte sich aber, daß für den Fall, wo die *Pt*-Elektroden außerhalb der Flamme waren, auch kein Leitfähigkeitseffekt auftrat, während dieser andererseits bei *Na*-Dampf vorhanden war.

1) Bisher (da Andrade, l. c.) ist es nur gelungen, das Vorhandensein negativer *Na*-Metallionen nachzuweisen.

1) Archives des sciences phys. et nat. (5) **2**, 256, 1920.

(Eingegangen 10. März 1921.)

Aus der Ionenlehre der Gase.

Einige Demonstrationsversuche.

III. Mitteilung.

Von H. Greinacher.

Wechselstromversuche.

§ 7. Gleichrichtung im Kohlelichtbogen.

Wie früher beschrieben (l. c.), läßt sich durch Einbringen von Alkalimetalldampf in eine Bunsenflamme eine Wechselstromgleichrichtung erzielen. Ein ähnlicher Effekt läßt sich am Kohlelichtbogen demonstrieren. Zwei gewöhnliche Bogenkohlen stehen sich horizontal gegenüber. Man brennt den Lichtbogen mit Wechselstrom von 105, besser 210 Volt und 50 Perioden. Ein in den Stromkreis eingeschaltetes Drehspulampèremeter gibt bei ruhigem Brand keinen Ausschlag. Nun berührt man das eine Kohleende nahe dem Lichtbogen mit einem Glasstab (Kapillarröhre oder dergl.), bis Schmelzen und lebhafte *Na*-Dampfentwicklung eintritt. Sofort stellt sich eine Gleichstromkomponente von 1 und mehr Ampère ein. Diese verschwindet beim Entfernen des Glasstabs rasch wieder und tritt prompt in der entgegengesetzten Richtung auf, wenn man das andere Kohleende mit Dampf umgibt. Der Gleichstrom fließt dabei stets von der dampfumspülten Elektrode zur reinen Kohle. Der Sinn ist also gerade umgekehrt wie bei dem Flammenexperiment. Dies erklärt sich ungezwungen dadurch, daß in der Flamme das Kathodengefälle, im Kohlelichtbogen aber das Anodengefälle das größere ist. Da

das Anodengefälle im Lichtbogen nun durch den Metalldampf herabgesetzt wird, so ist der Gleichstromwiderstand des Bogens geringer, wenn der Dampf sich an der Anode befindet.

§ 8. Umkehrbare Ventilröhre.

Wird die Ausbildung des Glimmlichtes in einer Geißlerschen Röhre an der einen Elektrode etwa durch die Nähe der Gefäßwand beeinträchtigt, so tritt in bekannter Weise Ventilwirkung auf. Daß immer die frei ins Entladungsgefäß hineinragende Elektrode Kathode, die in einem engen Ansatz befindliche Anode wird, läßt sich vorteilhaft etwa an einer umkehrbaren Ventilröhre zeigen (Fig. 1). Zwei

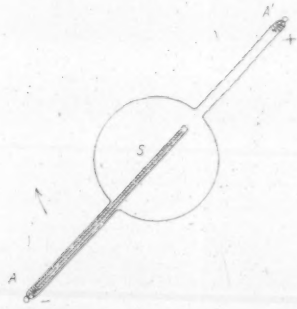


Fig. 1.

gleiche kurze Drahtspiralen (Al) AA' seien in zwei Glasröhren (1 cm Weite) als Elektroden eingeschmolzen. Eine lange Metallelektrode S (25 cm) mache mit A Kontakt und rage mit dem freien Ende in die Glaskugel (14 cm Durchmesser) hinein. In dieser Lage funktioniert A' als Anode und A, das nun in die Kugel hineinragt, an dem also das Glimmlicht sich ungehindert ausbreiten kann, wird Kathode. Dreht man die Röhre im Sinne des Pfeils um etwa 90°, so fällt S herunter und macht mit A' Kontakt. A' wird dann zur Kathode. Schaltet man etwa eine solche Röhre mit einer „Trichterröhre" bzw. Holtzschen Ventilröhre[1]) hintereinander und legt Wechselstrom an, so leuchtet bald der eine, bald der andere Arm der Trichterröhre, je nach der Lage der Ventilröhre. Damit die Elektrode S leicht sei, kann man sie etwa aus einem langen Al-Streifen (0,1 mm dick), den man zur Versteifung einmal der Länge nach bis zu einem Winkel von 60° falzt, herstellen. Das Vakuum wählt man so, daß das Glimmlicht um S nicht ganz bis zur Glaskugel reicht. Die Firma Gundelach stellt die Röhre nach meinen Angaben so her, daß eine kleine Kugel im Innern der Hohlkathode die Kontaktauswechslung besorgt. Es genügt dann ein Kippen der Ventilröhre um wenige Grade. Einer solchen Röhre (in Fig. 2 ist die Neigung übertrieben dargestellt) sieht man äußerlich von ihrer Umschaltbarkeit nichts an. Die Strom-

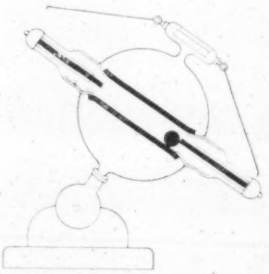


Fig. 2.

richtung erkennt man jedoch daran, daß der Strom immer von der höher gelegenen Elektrode zur tiefergelegenen fließt.

Es sei bei dieser Gelegenheit noch auf eine Gleichrichtung hingewiesen, die man auch bei vollständiger Symmetrie der Strombahn in bezug auf beide Elektroden erhalten kann. Hierzu ist nötig, daß 1. die Wechselspannung in den beiden Halbwellen verschiedenen Verlauf habe (das Spannungsintegral über eine Periode sei indes Null!) und daß 2. die Strombahn dem Ohmschen Gesetz nicht gehorche. Dies ist die Ursache dafür, daß eine symmetrisch gebaute Entladungsröhre mit Induktorstrom unipolare Entladung zeigt. Dabei ist der bei der selbständigen Entladung immer vorhandene Umstand, daß diese unterhalb einer gewissen Minimalspannung überhaupt nicht eintritt, nicht nötig. Auch das bei allen Spannungen stromführende Selen zeigt, wie ich seinerzeit nachgewiesen habe[1]), den auf der Ungültigkeit des Ohmschen Gesetzes beruhenden „anomalen" Gleichrichtereffekt. Derselbe Effekt wäre auch bei unselbständigen Entladungen zu erwarten, die durch das Auftreten von Sättigungsstromkurven gekennzeichnet sind. Diesbezügliche Versuche

1) W. Holtz, Wied. Ann. 10, 336, 1880. Siehe auch J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen 1905, S. 357 oder Katalog von Gundelach (Gehlberg).

1) Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 283, 1916.

haben indessen kein sicheres Resultat gezeigt. Wie mir scheint, wird hier die Deutung der Versuche durch die Frage kompliziert, inwieweit man die mit Gleichstrom aufgenommene Charakteristik als für den raschen Spannungsverlauf der Wechselfelder gültig ansehen darf.

§ 9. Flammengleichrichter.

Bringt man in eine Bunsenflamme zwei Elektroden und läßt die eine von Alkalimetalldampf bestreichen, so hat man nach früherem (§ 7 und l. c.) einen Flammengleichrichter. Seinerzeit war der Versuch nur mit Niederfrequenz (50 Perioden) ausgeführt worden. Hier sollen die Resultate für hohe Frequenz angegeben werden. Der Hochfrequenzwechselstrom wurde in der für die Erzeugung der sog. elektrodenlosen Ringentladung üblichen Weise erzeugt (Fig. 3). Die Drahtenden (E) waren mit

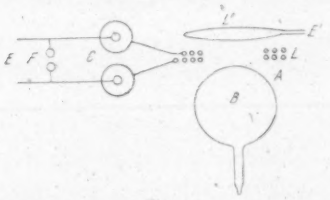


Fig. 3.

einem Induktorium von 40 cm Schlagweite, das primär mit Wechselstrom von 50 Perioden gespeist wurde, verbunden. Die Funkenstrecke F bestand aus Messingkugeln und war zur Erzeugung eines regelmäßigen Funkenstroms kräftig angeblasen (Wasserstrahlgebläse). C waren zwei größere Leidener Flaschen von je 0,0022 Mikrofarad[1]). Die Selbstinduktion L bestand aus 6 Windungen, die in zwei Ebenen zu je 3 Windungen spiralig gewickelt waren (siehe Bemerkungen in § 10). Der äußere Durchmesser des Drahtes (gut isoliertes Cu-Kabel) betrug 1 cm. Der Ring selbst hatte innen 8 cm, außen 14 cm Durchmesser und eine Dicke von 2 cm. Direkt über L befanden sich eine oder zwei davon isolierte Windungen L', deren Enden E' nun über einen Flammengleichrichter und ein Galvanometer (Empfindlichkeit $3 \cdot 10^{-9}$ Amp/mm) verbunden waren.

Die mittlere effektive Spannung an E' wurde mittels eines Elektrometers zu zirka 30 Volt bei einer, zu zirka 70 Volt bei zwei Windungen gemessen. Die maximale Spannung war indessen, wie ein mit E' verbundenes Funkenmikrometer zeigte (Schlagweite zirka 1 mm) weit größer.

Der Flammengleichrichter bestand (wie früher) aus 2 über Fe-Drähte geschobenen massiven Messinghülsen, die horizontal und parallel zueinander zirka 2 cm über der Brennermündung angeordnet waren. Sie tauchten nur mit den Enden in die Flamme, wodurch eine zu starke Erwärmung vermieden wurde. Andererseits ist es günstig, die Flammentemperatur durch starke Luftzufuhr hoch zu wählen. Ferner wurde beobachtet, daß die Wirkung gesteigert wird, wenn der Alkalimetalldampf bis nahe an die zweite Elektrode heranreicht.

Erzeugte man nun Schwingungen in L, so zeigte zunächst das Galvanometer keinen nennenswerten Ausschlag. Führte man jedoch eine Salzperle mit Na, Sr oder K (hier genügte auch eine Zigarette) ein, so trat ein Ausschlag in dem früher (l. c.) angegebenen Sinne ein. Sr gab wenig mehr wie Na, besonders viel K; bei einer Windung 10—15 cm, bei zwei Windungen über 60 cm[1]). Brachte man an L etwa von unten her einen Glasballon, der elektrodenlose Ringentladung (in der Höhe von A) zeigte, heran, so ging der Galvanometerausschlag zurück, anzeigend, daß L Energie entzogen wurde[2]).

Vergleichende Versuche mit Wechselstrom von 50 Perioden zeigten, daß der Grad der Gleichrichtung bei Hochfrequenz von derselben Größenordnung ist. Immerhin ist zu beachten, daß es sich um gedämpfte Schwingungen handelt, die mit der Frequenz des Erregerfunkens (F) angeregt werden. Es muß daher die Frage, ob nur die einzelnen Wellenzüge als ganzes, die abwechselnd in der einen und der anderen Richtung angeregt werden, oder ob die einzelnen Wellen gleichgerichtet werden, noch dahingestellt bleiben. Hier dürften noch weitere Versuche über die Trägheitslosigkeit des Gleichrichters für hohe Frequenzen angezeigt sein.

Die Funkenfrequenz läßt sich im rotierenden Spiegel schätzen. Alle $^1/_{100}$ Sekunden (Wechselzahl des verwendeten Wechselstroms) war eine Aufeinanderfolge von 3—4 Funken zu beobachten, der bis zur nächsten Funkenfolge eine Pause folgte (siehe etwa Fig. 381 in Zenneck l. c.

1) Es ist angezeigt (vgl. Zenneck, l. c. S. 455), das Induktorium mit den inneren Belegungen der Leidener Flaschen zu verbinden.

1) Die Alkalizufuhr zur Flamme läßt sich leicht gleichmäßig machen, wenn man eine wässerige Lösung (z. B. KCl) in unmittelbarer Nähe des Flammensaums zerstäubt. Dies kann dadurch geschehen, daß man die Lösung mittels zweier nebeneinander eingeführter Pt-Drähte (4 Volt) elektrolysiert.

2) Es möge hier erwähnt sein, daß Versuche, elektrodenlose Ringentladung bzw. ringförmig verlaufende Ströme in einem Ringbrenner direkt nachzuweisen, nicht zum Ziele führten.

S. 426). Die Schwingungsfrequenz wurde bestimmt mit einem Resonanzkreis aus einer einlagigen Spule von der Länge 18,5 cm und dem mittleren Durchmesser von 2 cm, deren Selbstinduktion zu $2{,}2 \cdot 10^{-5}$ Henry berechnet wurde[1]) und einem Drehkondensator, zu dem eine Pintschsche Glimmlichtlampe als Indikator parallel geschaltet war. Die Resonanz ließ sich an der maximalen Ausdehnung des Glimmlichts sehr scharf erkennen. Die Frequenz ergab sich hieraus zu $1{,}84 \cdot 10^6$. Die Schwingungen sind infolge des Energieverbrauchs im Funken F stark gedämpft. Betrachtete man einen durch die Pintschlampe beleuchteten Spalt im rotierenden Spiegel, so erhielt man Spaltbilder in der Anordnung und Zahl der Erregerfunken. Bei der ringförmigen Entladung (Ballon B Fig. 3) beobachtete man dasselbe. Hier muß die Dämpfung infolge des großen Energieverbrauchs im Ringstrom noch wesentlich größer sein.

§ 10. Elektrodenlose Ringentladung.

Die Ursache des elektrodenlosen Ringstroms wird allgemein in dem elektrodynamischen Wechselfeld der Induktionsspule gesehen. Der elektrodenlose Ringstrom bildet sozusagen die einwindige Sekundärspule eines Teslatransformers. Daß sich die Erscheinung gerade an der Peripherie des Glasgefäßes ausbildet, erklärt sich einfach dadurch, daß dort eine maximale e.m.K. wirksam ist. Es wächst zwar der Umfang, auf den sich die induzierte e.m.K. verteilt, aber die vom Entladungsring eingeschlossene Kraftlinienzahl nimmt mit der Kreisfläche, also quadratisch, zu[2]). Immerhin hat Hartmann[3]) überzeugend gezeigt, daß auch das elektrostatische Wechselfeld der Induktionsspule eine ionisierende Wirkung ausübt. Zwischen den einzelnen Windungen, insbesondere zwischen Anfang und Ende, befinden sich beträchtliche Wechselspannungen, auf deren Wirkung der von Wachsmut u. Winawer[4]) beschriebene Leitfähigkeitseffekt im Druckbereich von 1—2 mm Hg zurückzuführen ist. Gewöhnlich begegnet man dem störenden Einfluß des statischen Wechselfeldes dadurch, daß man die Wicklung spiralig in einer (äquatorialen) Ebene vornimmt[5]). Analog sind auch bei vorliegenden Versuchen die Windungen L spiralig jedoch in zwei Ebenen angeordnet.

Daß aber auch bei der elektrodenlosen Ringentladung selbst das Wechselfeld immer noch eine Rolle spielt, zeigen folgende Versuche. Es wurde der Ballon B (10 cm Durchmesser) der Selbstinduktion L soweit genähert, daß gerade Ringentladung einsetzte. Brachte man nun die Hand in den Zwischenraum bei A hinein, ohne indessen B oder L zu berühren, so erlosch der Ring. Steckte man ein zylindrisches Entladungsgefäß ($4^1/_2$ cm Durchmesser) in L hinein, so genügte das Überschieben eines Metallzylinders, um die Ringentladung auszulöschen. Der Metallzylinder war übrigens der Länge nach geschlitzt, so daß sich keine induzierten Ringströme darin ausbilden konnten. Der Einfluß bestand also nicht in einer magnetischen Schirmwirkung, sondern darin, daß der Metallzylinder als induzierte Kapazität wirkte, wodurch eine elektrostatische Schirmwirkung gegenüber dem Entladungsgefäß eintrat. Der Metallzylinder brauchte nicht mit Erde verbunden zu sein, sondern konnte mit derselben Wirkung auf einem Stück Paraffin isoliert eingeschoben werden.

Diese Erscheinungen verschwanden, als man den Induktionsring L mit Stanniolband umwickelte. Nur an einer schmalen Stelle wurde der Ring von der Stanniolumhüllung frei gelassen. Da somit keine geschlossenen Ringströme im Stanniolring auftreten konnten, so war die elektrodynamische Wirkung der Spule nicht beeinträchtigt. Wohl aber wurde durch die im Stanniol induzierten Ladungsströme das elektrostatische Wechselfeld praktisch abgeschirmt.

Die Ringentladung setzte jetzt erst bei stärkerer Erregung wie früher ein. Die kleine Röhre ($4^1/_2$ cm Durchmesser) war auch bei stärkstem Strom überhaupt nicht mehr zu betreiben, die zweite (10 cm Durchmesser) leuchtete bei stärkster Erregung (rötliches Licht, H-linien) stark und nur die größte (hier ließ sich in einfachster Weise eine Demonstrations-Oxydkathodenröhre von zirka 12 cm verwenden) leuchtete schon mit schwächerem Strom (weißliches Licht, grüne Hg-Linie) stark hervortretend.

Hieraus dürfte die begünstigende Wirkung des elektrostatischen Wechselfeldes auf die elektrodenlose Ringentladung deutlich hervorgehen. Es empfiehlt sich daher zur Erzeugung möglichst reiner elektrodynamischer Verhältnisse die Induktionswindungen in der angegebenen Art metallisch zu umgeben.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität, März 1921.

(Eingegangen 10. März 1921.)

1) Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Physik. 12. Aufl. S. 552.

2) Vgl. Zenneck, l. c. S. 481.

3) A. Hartmann, Dissertation Basel 1918. Bulletin des Schweiz. Elektrotechn. Vereins 10, 52, 1919.

4) R. Wachsmut u. B. Winawer. Ann. d. Phys. 42, 585, 1913.

5) Bergen Davis, Phys. Rev. 20, 129, 1905.

Das Tropf-Emanoskop. Eine Anordnung zur schnellen Bestimmung des Emanationsgehaltes radioaktiver Wässer.

(Aus dem Radium-Institut der Bergakademie Freiberg i. S.)

Von P. Ludewig.

Zur Bestimmung des Emanationsgehaltes radioaktiver Wässer gibt es eine Anzahl einfacher Meßanordnungen (Fontaktoskop, Fontaktometer, Emanometer usw.), die unter geeigneten Bedingungen genaue Werte des Emanationsgehaltes zu bestimmen gestatten. Bei diesen Apparaten ist es zweckmäßig, eine bestimmte Emanationsmenge und damit eine bestimmte Wassermenge zur Messung zu bringen, da dann die größte Meßgenauigkeit erreicht wird. Bei einer Fontaktoskop- oder Fontaktometermessung ist es z. B. nötig, die Menge des Wassers so zu bemessen, daß etwa 20 M.E. direkt in die Kanne hineinkommen; bei einem Emanometer wird man diese Menge, um gute Genauigkeit zu erhalten, etwas größer wählen.

Hat man ein Wasser zu messen, dessen Emanationsgehalt nicht bekannt ist, so wird es leicht vorkommen, daß man entweder eine zu große Emanationsmenge in den Ionisationsraum bringt, daß infolgedessen der Abfall am Voltmeter zu schnell erfolgt und der Raum unnötig verseucht wird, oder daß man bei sehr schwachen Wässern die Wassermenge zu gering wählt und damit einen zu langsamen Abfall des Elektrometers erhält.

Dieser Unsicherheit wäre abgeholfen, wenn man eine Methode zur Verfügung hätte, mit der es möglich wäre, schnell den ungefähren Gehalt des Wassers vorher zu bestimmen; dann kann man für die Hauptmessung günstige Versuchsbedingungen wählen. Im folgenden soll eine Anordnung beschrieben werden, die nicht nur den genannten Zweck erfüllt, sondern auch nach einmaliger Eichung unabhängig von den anderen Apparaten eine Bestimmung des Emanationsgehaltes von Wässern mit einer Genauigkeit von 5 bis 10 Proz. sehr schnell auszuführen gestattet. Sie ist im besonderen als Hilfsapparat für künstliche radioaktive Quellen von Wert.

Die Anordnung besteht (siehe Fig. 1) aus einem Ionisationsgefäß, dessen Höhe 375 mm beträgt und dessen Querschnitt ein Quadrat mit der Seitenlänge von 100 mm ist. Auf das Ionisationsgefäß wird oben das Elektrometer, in unserem Fall ein Wulfsches Zweifaden-Elektrometer aufgesetzt, dessen Fadensystem mit einem Zerstreuungsstab von 6 mm Durchmesser und 34 cm Länge verbunden ist. In jeder Seitenwand des Ionisationsgefäßes ist oben ein Schlauchansatz angebracht, der zu einer Düse D (Fig. 2) führt. Jede der Wandungen ist innen mit einem Rinnensystem nach Fig. 2 versehen. Das

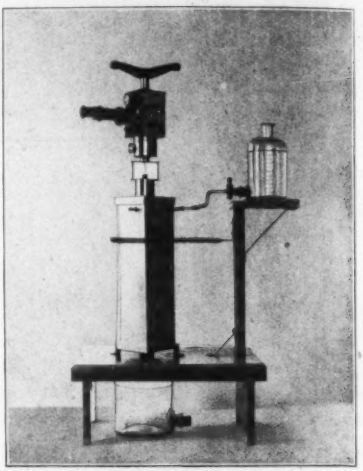


Fig. 1.

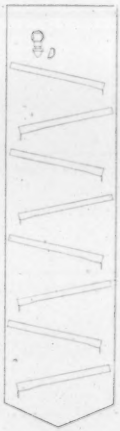


Fig. 2.

aus der Düse D ausfließende Wasser tropft in die oberste Rinne, läuft in ihr hinab, tropft in die nächste Rinne usw. und fließt unten durch eine Öffnung im Ionisationsgefäß in ein Sammel-

gefäß ab. Um ein gleichbleibendes Tropfen zu gewährleisten, sind an den Enden der Rinnen kurze dünne Kupferdrähtchen angelötet, an denen das Wasser heruntertropfen muß. Das zu untersuchende Wasser wird vor dem Versuch bis zur Marke 10 in die Flasche eingefüllt. Es passiert einen Hahn und läuft von dort durch die Düsen in die Rinnen. Es können die Rinnen einer Wand, oder mehrerer Wände zu gleicher Zeit in Tätigkeit treten. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf das Heruntertropfen an zwei Seitenwänden. Zwischen dem Hahn und den Düsen ist dazu eine Verzweigung des Glasrohres eingefügt.

Bei dem Heruntertropfen in den Rinnen gibt das Wasser einen Teil seiner Emanation an den Ionisationsraum ab. Der Apparat kann nur dann brauchbare Werte geben, wenn bei Zimmertemperatur und einer bestimmten Aktivität des Wassers prozentual immer der gleiche Teil der Emanation herausgetropft wird. Um dies zu prüfen, wurden einige Versuche gemacht, bei denen der Emanationsgehalt des Wassers pro Liter vor und nach dem Heruntertropfen mit einem Fontaktoskop gemessen wurde. Die Tabelle I enthält das Ergebnis. Der Prozentgehalt der Emanation, die herausgetropft wird, ist demnach bei Zimmertemperatur hinreichend konstant.

Tabelle I.

Mache-Einheiten im Liter		Differenz	
vorher	nachher	M.-E.	in Proz.
514	231	283	55,0
457	195	262	57,2
410	178	232	56,5

Es wurde zunächst der Normalverlust des neuen Apparates bestimmt, und zwar, wenn der Zerstreuungsstab positiv und wenn er negativ aufgeladen war. Das Wulfsche Elektrometer wurde dabei bis über den Teilstrich 80 (einseitig abgelesen) aufgeladen, im Augenblick des Durchgangs des linken Fadens durch 80 der Hahn aufgedreht und die Stoppuhr in Gang gesetzt. Es wurde dann bestimmt, über wieviel Teilstriche der linke Faden in zwei Minuten wanderte.

Die Tabelle II enthält eine größere Anzahl von Messungen an verschiedenen Tagen. An jedem der Tage wurde auch eine Messung mit aktivem Wasser (bis zu 1000 M.E. im Liter) gemacht, so daß sich aus der Tabelle zugleich ergibt, wie schnell die radioaktive Verseuchung des Apparates wieder verschwindet. Die Zahlen zeigen, daß das hinreichend schnell geschieht.

Tabelle II.

Normalverlust mit laufendem Wasser.

negativ aufgeladen		positiv aufgeladen	
Datum	Skalenteile in 2 Min.	Datum	Skalenteile in 2 Min.
24. 1.	4,2	22. 12.	8,8
26. 1.	4,5	23. 12.	9,0
27. 1.	4,1	24. 12.	9,5
28. 1.	4,2	27. 12.	8,5
29. 1.	4,5	28. 12.	8,5
30. 1.	3,9	29. 12.	5,0
31. 1.	2,3	30. 12.	8,0
1. 2.	3,5	31. 12.	8,2
2. 2.	2,7	1. 1.	9,2
3. 2.	3,9	2. 1.	9,2
4. 2.	3,3	3. 1.	5,5
5. 2.	3,0	4. 1.	9,8
7. 2.	2,5	5. 1.	14,0
8. 2.	3,6	6. 1.	8,2
		8. 1.	10,5
		9. 1.	7,8

Normalverlust ohne Wasserablauf.

Datum	Skalenteile in 2 Min.
31. 12.	2,4
8. 1.	2,1
11. 1.	2,6

Ein Vergleich der Werte für positive und negative Aufladung zeigt, daß die Werte bei positiver Aufladung wesentlich größer sind, als bei negativer Aufladung. Ferner schwanken die Werte bei positiver Aufladung mehr, als die Werte bei negativer Aufladung.

Diese Erscheinung rührt von der Wasserfallelektrizität her. Durch das Zertropfen des Wassers entsteht eine Ionisierung der Luft im Gefäß. Diese Ionisation[1]) rührt daher, daß an fallenden Wassertropfen eine bestimmte Elektrizitätsteilung einsetzt. Der Tropfen erhält positive Ladung, die Lufthülle um den Tropfen negative Ladung. Zerplatzt der Tropfen beim Aufprallen, so bleibt die positive Ladung im Wasser, die negative Ladung verursacht die Ionisation der Luft. Kleine Verunreinigungen des Wassers können den Effekt bedeutend erhöhen.

Wenn nur negative Ladung in die Luft geht, so wird ein positiv geladenes Elektrometer schnell entladen werden, ein negativ geladenes Elektrometer dagegen nicht. Dieser Unterschied kommt in den Zahlen der Tabelle II zum Ausdruck.

1) Siehe z. B. die zusammenfassende Darstellung von A. Becker, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 9, 52, 1912.

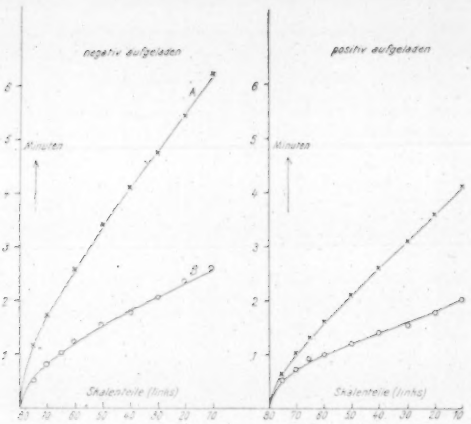


Fig. 3.

Bei den Versuchen, die in der Tabelle II enthalten sind, wurde gewöhnliches Leitungswasser verwendet. Macht man eine Bestimmung des Normalverlustes, ohne daß Wasser in den Rinnen herunterläuft, so erhält man Zahlen (siehe den unteren Teil der Tabelle II), die fast genau so klein sind, wie die Zahlen bei negativer Aufladung des Zerstreuungsstiftes und Wasserablauf.

Daß bei positiver Aufladung die Art des benutzten Wassers, wie erwähnt, von großem Einfluß sein kann, zeigt Tabelle III.

Tabelle III.

Einfluß der Ladung und der Polarität auf den Normalverlust.

11. I. 21	Leitungswasser	+	10,8 Sk.T.
	„ „	−	3,1 „
12. I. 21	Destilliertes Wasser	+	55,2 „
	„ „	−	3,2 „

Bei Benutzung von Leitungswasser ergaben sich bei positiver Aufladung 10,8 Skalenteile Abfall in zwei Minuten, bei negativer Aufladung 3,1 Skalenteile. Diese Zahlen bieten gegenüber der Tabelle II nichts Neues. Bei einem anderen Versuch wurde ein Wasser benutzt, das als „destilliertes Wasser" bezogen worden war. Bei positiver Aufladung ergab sich ein Normalverlust von 55,2(!) Skalenteilen und bei negativer Aufladung ein Normalverlust von 3,2 Skalenteilen. Dieses destillierte Wasser hatte demnach kleine Beimengungen, die den Wasserfalleffekt bedeutend erhöhten. Aus diesen Zahlen geht hervor, daß einwandfreie Messungen mit dem Tropf-Emanoskop nur dann möglich sind, wenn der Zerstreuungsstab negativ aufgeladen ist.

Um ein geeignetes Meßverfahren auszuwählen, wurde zunächst die Bewegung des Elektrometerfadens in Abhängigkeit von der Zeit beim Heruntertropfen von Wasser verschiedenen Emanationsgehaltes untersucht. Vor der Messung wurde das Elektrometer so eingestellt, daß die beiden Fäden vor der Aufladung rechts und links gleichen Abstand (5 Skalenteile) vom Nullpunkt hatten. Das Elektrometer wurde sodann soweit aufgeladen, daß die Fäden etwas über den äußersten Teilstrichen von je 80 Skalenteilen standen. Beobachtet wurde in allen Fällen nur die Bewegung des linken Fadens. In dem Augenblick, wo dieser durch den Teilstrich 80 hindurchging, wurde der Hahn aufgedreht und dann wurden die Zeiten des Durchgangs des Fadens durch die Hauptskalenteile an einer Stoppuhr abgelesen, die zugleich mit dem Aufdrehen des Hahnes in Gang gesetzt worden war.

Für Wasser verschiedener Aktivität wurden bei negativer Aufladung die Kurven A und B der Fig. 3 erhalten. Alle anderen Kurven haben den gleichen Charakter. Anfänglich ist die Bewegung des Fadens sehr langsam; erst wenn eine bestimmte Menge von Emanation herausgetropft ist, wird die Bewegung schneller und die Kurve verläuft dann geradlinig weiter. Der erste Teil dieser Kurven ist natürlich für die Messungen unbrauchbar.

Die Meßweise wurde so festgelegt, daß erstens das Elektrometer bis über den Teilstrich

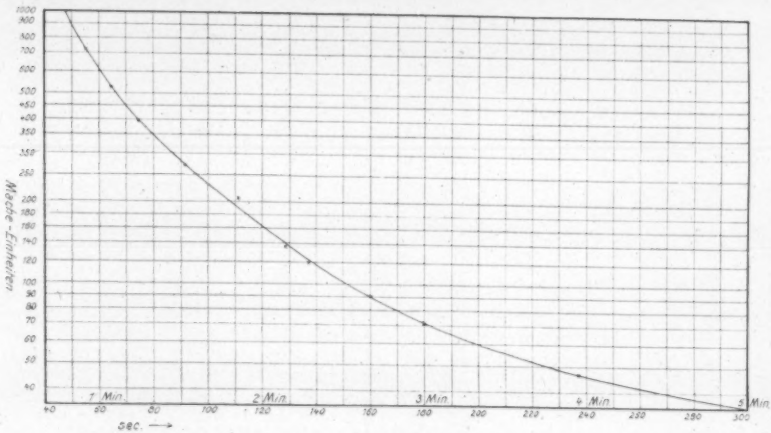


Fig. 4.

80 hinaus negativ aufgeladen wurde, zweitens im Augenblick des Durchgangs des Fadens durch 80 der Hahn aufgedreht wurde, drittens beim Durchgang des Fadens durch 65 die Stoppuhr in Gang gesetzt wurde, viertens beim Durchgang des Fadens durch 30 die Stoppuhr gestoppt wurde. Die so abgestoppte Zeit zwischen den Teilstrichen 65 und 30 gibt ein Maß für die Stärke der Aktivität der Quelle.

Der Apparat muß mit einer der bekannten Meßanordnungen geeicht werden. Die Eichung geschah mit einem Fontaktoskop, und zwar wurde darauf geachtet, daß die im Fontaktoskop zur Messung benutzte aktive Wassermenge eine möglichst genaue Messung gewährleistete. Die so erhaltenen Eichwerte sind in Tabelle IV und in das Kurvenbild Fig. 4 eingetragen.

Die Ordinate dieses Kurvenbildes ist logarithmisch geteilt. Die Eichkurve zeigt, daß der Apparat bei Benutzung von zwei Düsen und dementsprechend der Rinnenfolgen zweier Seitenwände Messungen von Wässern auszuführen

Tabelle IV.

Eichtabelle des Tropf-Emanoskops.

Mache-Einheiten im Liter	Zeit (65 bis 30 Sk.T.
708	54.8 sec
528	63.8 „
390	74.0 „
272	91.5 „
205	111.0 „
135	128.0 „
120	137.0 „
90	160.0 „
72	178.0 „
46.6	237.0 „

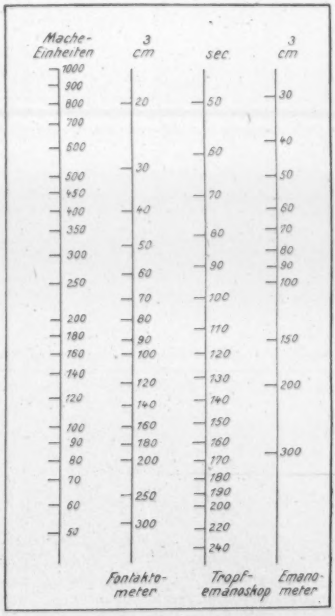


Fig. 5.

gestattet, die zwischen 40 und 1000 Mache-Einheiten im Liter enthalten.

In der Parallelkoordinatendarstellung nach Fig. 5 sind die Werte, die am Tropf-Emanoskop gewonnen wurden, mit der Anzahl von Kubikzentimetern in Beziehung gesetzt, die man zweckmäßig bei einer Messung mit dem Fontaktometer oder Emanometer zur Messung bringt. Hat z. B. die Messung am Tropf-Emanoskop 60 Sekunden gedauert, so wird man von dem gleichen Wasser in einer Fontaktometerkanne etwa 28 ccm zur Messung bringen und bei einer Emanometermessung etwa 40 ccm.

Es ist möglich den Meßbereich des Instrumentes in einfacher Weise zu ändern. Will man stärkere Wässer messen, so wird man statt der Rinnensysteme zweier Seitenwände nur eine Seitenwand in Tätigkeit treten lassen. Will man schwache Wässer messen, so kann man die Rinnen aller vier Seitenwände zu gleicher Zeit wirksam machen. Man erhält so drei Eichkurven, die einen großen Meßbereich überdecken.

Zusammenfassung.

Es wird eine Anordnung beschrieben, mit der es möglich ist, den Emanationsgehalt radioaktiver Wässer in wenigen Minuten mit einer Genauigkeit von 5—10 Proz. zu messen. Das zu untersuchende Wasser fließt aus einer Flasche in ein Rinnensystem, in dem es beim Heruntertropfen einen Teil seiner Emanation abgibt. Die Schnelligkeit der Entladung eines negativ aufgeladenen Elektrometers, das mit einem im Tropfraum hängenden Zerstreuungsstab verbunden ist, und das schon während des Heruntertropfens in Tätigkeit tritt, ist ein Maß für den Emanationsgehalt des Wassers. Es können mit dem ausgeführten Apparat Wässer direkt gemessen werden von einem Gehalt von 40 bis 1000 Mache-Einheiten im Liter. Der Meßbereich kann leicht vergrößert oder verkleinert werden.

(Eingegangen 14. März 1921.)

Molekularkräfte und ihre elektrische Deutung.

Von P. Debye.

1. Vor etwa einem Jahre[1]) konnte ich zeigen, daß zwischen den Molekülen aller Substanzen eine gegenseitige Anziehung vorhanden sein muß als Folge der Polarisation, welche das eine Molekül im elektrischen Felde des andern erfährt. Während die „Polarisierbarkeit" eines Moleküls als experimentell bekannt angesehen werden kann, sobald der Brechungsexponent (und eventuell die Dispersion) gemessen ist, muß die Felderzeugung zurückgeführt werden auf die (mittlere) Anordnung der Ladungen im Molekül.

Je nachdem der Schwerpunkt der aufbauenden positiven Ladungen mit dem Schwerpunkt der negativen zusammenfällt oder nicht, leitet sich das Feld in größerem Abstand ab aus einem dem Molekül zugeordneten Dipolmoment oder aus drei einen Quadrupol bestimmende elektrischen Hauptträgheitsmomenten. (Im ersten Falle ist das Molekül in elektrischer Hinsicht durch einen Pfeil, im zweiten durch eine Fläche zweiten Grades geometrisch charakterisiert.) Die hierauf fußende Unterscheidung der Molekülarten in zwei großen Hauptgruppen, von denen die der ersten Art angehörigen im allgemeinen wesentlich stärkere elektrische Felder in ihrer Umgebung zu erzeugen vermögen, als solche, welche der zweiten Gruppe angehören, scheint mir den ausgesprochen vorhandenen Unterschieden im Verhalten der Körper sehr gut zu entsprechen (Assoziation, dissoziierende Kraft für Elektrolyte, dielektrisches Verhalten[1]), anomale Dispersion für lange Wellen usw.[2]) Während nun die Unterscheidung der beiden Hautgruppen und die quantitative Bestimmung der Dipolmomente unter anderem mit Hilfe von Messungen über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante verhältnismäßig leicht möglich ist, im selben Sinne, wie die entsprechenden magnetischen Momente auf Grund des Curie-Langevinschen Gesetzes abgeleitet werden, bietet der Nachweis und die absolute Bestimmung der elektrischen Trägheitsmomente größere Schwierigkeiten.

Während nämlich ein Dipolmolekül von einem homogenen elektrischen Felde ein Drehmoment erfährt, ist ein Quadrupolmolekül unter diesen Umständen im indifferenten Gleichgewicht. Letzteres kann demnach die gewöhnlich mit Hilfe von homogenen Feldern ausgeführten elektrischen Messungen nicht beeinflussen. Es dürfte aber doch von Interesse sein, auch Quadrupolmomente rein elektrisch nachzuweisen. Das scheint mir nun in folgender Weise möglich.

2. Das indifferente Gleichgewicht eines Quadrupolmoleküls ist nicht mehr vorhanden, sobald das elektrische Feld nicht mehr homogen ist. In einem inhomogenen Felde müssen demnach Quadrupolmoleküle eine ähnliche Einstellungstendenz bekommen, wie Dipolmoleküle in einem homogenen Felde. Es liegt nahe, eine im inhomo-

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **13**, 97, 1912; M. Iona, diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.

2) P. Debye, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 777, 1913; J. Timmers, Diss. Utrecht 1914.

genen Felde erzwungene, im übrigen von der Wärmebewegung stark gestörte Ordnung optisch nachzuweisen, und zwar wird sich dieselbe darin zeigen müssen, daß die Substanz doppelbrechend wird. Nun ist aber schon im homogenen Felde auch bei Quadrupolmolekülen eine Doppelbrechung vorhanden, das ist die gewöhnlich als Kerr-Effekt bezeichnete Erscheinung. Nach der offenbar das Wesentliche treffenden Theorie von Langevin[1]) beruht dieser Effekt darauf, daß die Moleküle in verschiedenen Richtungen verschieden stark polarisierbar sind und infolgedessen, ähnlich wie ein Kristall, eine Einstellungstendenz auch im homogenen Felde besitzen. Um die Störung des vermuteten neuen Effektes durch den Kerr-Effekt zu vermeiden, muß man deshalb beobachten an einer Stelle des Feldes, wo die Feldstärke selber Null, dafür aber die räumliche Änderungsgeschwindigkeit derselben möglichst groß ist. In der nebenstehenden Fig. 1

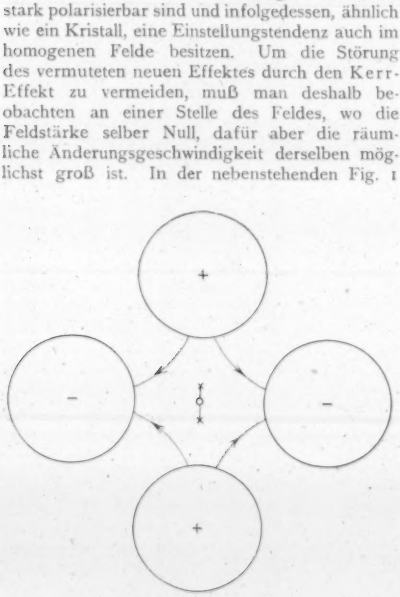


Fig. 1.

ist eine Anordnung skizziert, in derem Mittelpunkt diese Forderungen erfüllt sind; zugleich ist angegeben, wie ein einfaches Quadrupolmolekül, bestehend aus zwei durch Kreuze gekennzeichneten Negativen und einer durch einen Kreis angedeuteten positiven Ladung sich einzustellen bestrebt ist. Eine genauere Rechnung zeigt mir, daß der Effekt wohl noch praktisch beobachtbar sein dürfte; über eingehendere Versuche in dieser Richtung werde ich aber erst in einiger Zeit berichten können.

3. Jede Erscheinung indessen, welche ursächlich auf das im Innern des Körpers vorhandene, von den Molekülen oder Atomen erzeugte elektrische Feld zurückgeführt werden kann, liefert prinzipiell eine Methode. Die oben zitierte Arbeit baut eine solche auf Werte für die van der Waalsschen Attraktionskräfte, wie sie aus Beobachtungen über die Zustandsgleichung gefolgert werden können.

Aus genau umschriebenen Prämissen für die zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte eine allgemeingültige Zustandsgleichung abzuleiten, ist indessen bekanntlich eine äußerst schwierige und bis jetzt ungelöste Aufgabe. Man muß sich mit Näherungen begnügen, wie etwa die van der Waalssche Gleichung eine ist. Ich hatte damals schon Gelegenheit, auf diesen Punkt hinzuweisen und dementsprechend hervorzuheben, daß die aus der van der Waalsschen Attraktionskonstante a berechneten Werte des mittleren elektrischen Trägheitsmomentes τ nur die Größenordnung treffen können. Demgegenüber schien es mir dort weiterhin angezeigt, auf ein von Kamerlingh-Onnes begründetes und von Keesom in mehreren Arbeiten entwickeltes Verfahren hinzuweisen, die Zustandsgleichung in Form einer systematisch geordneten Reihenentwicklung zu erhalten. Schreibt man die Zustandsgleichung in der Form:

$$p v = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{v} + \frac{\mathfrak{C}}{v^2} + \ldots, \qquad (1)$$

so handelt es sich darum, die „Virialkoeffizienten“: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ als Temperaturfunktionen (gewöhnlich in Form von Reihen nach absteigenden Potenzen von T) zu berechnen. In dieser Form geschrieben würde die van der Waalssche Gleichung:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \qquad (2)$$

für die Virialkoeffizienten liefern:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= RT, \\ \mathfrak{B} &= RT\left(b - \frac{a}{RT}\right), \\ \mathfrak{C} &= RTb^2. \\ &- - - - - - \end{aligned}\right| \qquad (2')$$

Keesom hat nun in jener Reihe von Arbeiten, auf welche oben Bezug genommen wurde, die Berechnung des zweiten Virialkoeffizienten $\mathfrak{B}$ streng durchgeführt, unter der Annahme, daß die Moleküle entweder einen starren elektrischen Dipol, oder starr elektrische Quadrupole tragen und sich überdies bezüglich ihrer Abstoßung wie harte Kugeln verhalten. Er kommt so auf Reihenentwicklungen von der Form:

$$\mathfrak{B} = RT\left(c_0 + \frac{c_2}{T^2} + \frac{c_3}{T^3} + \ldots\right).$$

In einer sehr dankenswerten Zusammenfassung hat er die Einzelresultate seiner Rech-

1) P. Langevin, Le Radium 7, 233 u. 249, 1910.

nungen neulich zusammengestellt[1]). Charakteristisch für diese Entwicklungen ist die Tatsache, daß das Reihenglied mit der ersten Potenz $1/T$ durchweg fehlt. Das ist eine Folge der bei Keesom vorausgesetzten Starrheit der elektrischen Anordnung ins Molekül und würde im Gegensatz zu der van der Waalsschen Gleichung und der daraus folgenden Form für $\mathfrak{B}$ [vgl. (2′)] bedeuten, daß in der Grenze für hohe Temperaturen die gegenseitige Anziehung der Moleküle verschwindet. Wie ich in der oben zitierten Arbeit zu zeigen versuchte, ist eine universelle bei allen Temperaturen vorhandene Anziehung nur dann verständlich, wenn man im Sinne der optischen Erfahrung die Starrheit der Anordnung aufgibt und auf die „Polarisierbarkeit" der Moleküle achtet.

Keesom erkennt in der zitierten Arbeit diesen Standpunkt als berechtigt an und versucht nun daraufhin im Sinne meiner Anregung die Reihenentwicklung für $\mathfrak{B}$ durch Berücksichtigung der „Polarisationskräfte" zu verbessern. Tatsächlich tritt nunmehr das Glied mit der ersten Potenz von $1/T$ hinzu, und zwar wie es, die Richtigkeit der Rechnung vorausgesetzt, sein muß mit genau demjenigen Koeffizienten, wie er aus dem von mir angegebenen Wert von a in Zusammenhang mit (2′) folgt.

Durch Vergleich dieser verbesserten Entwicklung mit den erfahrungsmäßigen Werten für Wasserstoff kommt Keesom nun aber zum Schluß, daß im vorliegenden Temperaturgebiet der Einfluß der Polarisationskräfte zwar vorhanden ist, aber praktisch neben den früher von ihm schon in Rechnung gezogenen, bei hohen Temperaturen verschwindenden Kräften nicht stark ins Gewicht fällt. Dem entspricht es, daß er für das mittlere elektrische Trägheitsmoment andere und zwar kleinere Werte als ich sie angab für besser hält (z. B. für O_2 der Wert $3{,}55 \cdot 10^{-26}$ an Stelle von $11{,}2 \cdot 10^{-26}$). Wenn ich nun auch, wie schon hervorgehoben, meine Zahlen ebensowenig als genau richtig ansehen kann, wie die van der Waalssche Gleichung selbst, so sehe ich mich doch gezwungen, auch die neuen Keesomschen Zahlen anzuzweifeln und zwar sie wenigstens für O_2 und N_2 als zu niedrig gegriffen anzusehen. Die ganze Meinungsverschiedenheit zwischen Keesom und mir bezieht sich demnach für die vom ersteren zum Vergleich herangezogenen Gase lediglich auf die Zahlenangaben, in prinzipieller Hinsicht teilen wir denselben Standpunkt. Für einatomige Gase verliert die Orientierungstheorie überhaupt ihre Bedeutung (vgl. S. 305 unter **5**.)

1) W. H. Keesom, diese Zeitschr. **22**, 129, 1921.

4. Der Grund, warum ich höhere Werte des mittleren elektrischen Trägheitsmomentes τ für wahrscheinlicher halte ist der folgende. Vom rein experimentellen Gesichtspunkte aus, nur für die Hauptzüge geleitet durch theoretische Anhaltspunkte, hat Kamerlingh-Onnes eine mittlere empirische reduzierte Zustandsgleichung aufgestellt unter Zugrundelegung von Beobachtungsresultaten für Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Äthyläther und Isopentan. Dieselbe ist praktisch der van der Waalsschen Gleichung weit überlegen, er schreibt diese Zustandsgleichung für die reduzierten Größen p/p_k, v/v_k, T/T_k in der (1) entsprechenden Form:

$$\frac{p}{p_k}\frac{v}{v_k} = A + \frac{B}{v/v_k} + \frac{\Gamma}{(v/v_k)^2} + \cdots \qquad (3)$$

Die „reduzierten Virialkoeffizienten" selbst werden wieder dargestellt in der Form:

$$\left.\begin{aligned} A &= K\frac{T}{T_k},\\ B &= K^2\frac{T}{T_k}\left\{\beta_0 + \beta_1\frac{T_k}{T} + \beta_2\left(\frac{T_k}{T}\right)^2 + \cdots\right\},\\ \Gamma &= K^3\frac{T}{T_k}\left\{\gamma_0 + \gamma_1\frac{T_k}{T} + \gamma_2\left(\frac{T_k}{T}\right)^2 + \cdots\right\},\\ &\text{— — — — — — — — — — — —} \end{aligned}\right| \qquad (3')$$

mit

$$K = \frac{RT_k}{p_k v_k}, \qquad (3'')$$

während die Entwicklungskoeffizienten $\beta_0, \beta_1 \ldots$; $\gamma_0, \gamma_1 \ldots$, nunmehr reine Zahlen sind. Von diesen werden $5 \times 5 = 25$ Stück aus dem Beobachtungsmaterial ausgerechnet und z. B. angegeben in dem Artikel H. Kamerlingh-Onnes und W. H. Keesom (Enz. d. mathemat. Wiss. **5**, 10, 730). Uns interessieren hier nur β_0 und β_1, für welche Kamerlingh-Onnes die Werte findet:

$$\beta_0 = 0{,}117796, \quad \beta_1 = -0{,}228038. \qquad (4)$$

Auch die spezielle van der Waalssche Gleichung kann natürlich auf die obige reduzierte Form gebracht werden. Bezeichnet man die so erhältlichen Virialkoeffizienten mit A_w, $B_w, \ldots$ so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} A_w &= K\frac{T}{T_k},\\ B_w &= K^2\frac{T}{T_k}\left[\frac{p_k}{RT_k}b - \frac{p_k}{R^2T_k^2}a\frac{T_k}{T}\right] =\\ &= K^2\frac{T}{T_k}\left[\frac{1}{8} - \frac{27}{64}\frac{T_k}{T}\right],\\ \Gamma_w &= K^3\frac{T}{T_k}\left(\frac{p_k}{RT_k}\right)^2 b' = K^3\frac{T}{T_k}\frac{1}{64}.\\ &\text{— — — — — — — — — — — —} \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Es ist im Zusammenhange mit den Überlegungen über die Polarisationskräfte von be-

sonderem Interesse, daß die mittlere empirische reduzierte Zustandsgleichung im zweiten Virialkoeffizienten B ein Glied mit der ersten Potenz von $1/T$ und dem negativen Zeichen (β_1 negativ!) enthält. Damit ist wohl streng empirisch die Existenz der Polarisationskräfte nachgewiesen.

Ein Vergleich von (5) mit (3') und (4) zeigt unmittelbar, daß die mittlere reduzierte Zustandsgleichung etwas andere Werte für b und a verlangt, als die van der Waalssche, und zwar bekommt man den neuen Wert von b, indem man den van der Waalsschen mit:

$$8\beta_0 = 8 \cdot 0{,}117796 = 0{,}942$$

und den neuen Wert von a, indem man den van der Waalsschen mit:

$$-\frac{64}{27}\beta_1 = \frac{64}{27}\,0{,}228038 = 0{,}540$$

multipliziert.

Nun wurde früher das mittlere elektrische Trägheitsmoment berechnet nach der Formel ((21), l. c. S. 182):

$$\tau^2 = \frac{10}{9}\,\frac{1}{NP_0}\,ad^5,$$

welche jetzt noch ebenso Gültigkeit hat. Legt man nicht mehr wie früher die van der Waalssche, sondern die praktisch ausgezeichnete mittlere reduzierte Zustandsgleichung zugrunde, so bedeutet dies (da der Moleküldurchmesser d tatsächlich aus b berechnet wurde), daß die neuen Werte von τ aus den früher angegebenen hervorgehen durch Multiplikation mit dem Faktor:

$$0{,}540^{1/5} : 0{,}942^{1/6} = 0{,}699.$$

Die Anpassung der Theorie an die empirische Gleichung von Kamerlingh-Onnes bedingt also eine Verkleinerung des elektrischen Trägheitsmomentes um 30 Proz. Die folgende Tabelle enthält für die drei Gase (H_2, O_2, N_2) die Werte von τ in der zweiten Spalte auf Grund der van der Waalsschen Konstanten, in der dritten nach Keesom und in der vierten auf Grund der auf Polarisation zurückzuführenden Anziehungskonstante der empirischen reduzierten Zustandsgleichung.

Werte von $\tau \cdot 10^{26}$.

H_2	3,20	2,03	2,14
O_2	11,2	3,55	7,84
N_2	13,3	3,86	9,30

Nur für den von Keesom besonders eingehend untersuchten Wasserstoff ist mit dem von ihm angegebenen Wert eine genügende Übereinstimmung vorhanden, die elektrischen Trägheitsmomente von O_2 und N_2 finden wir erheblich größer.

Zusammenfassend liefert die Verknüpfung meiner Theorie mit der empirischen reduzierten Zustandsgleichung zur Berechnung des mittleren elektrischen Trägheitsmomentes τ die einfache Beziehung:

$$\tau^2 = 0{,}00209\,\frac{RT_k}{NP_0}\left(\frac{RT_k}{p_k}\right)^{1/3}. \qquad (6)$$

($R = 8{,}31 \cdot 10^7$ = Gaskonstante, $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ = Loschmidtsche Zahl, T_k = kritische Temperatur, p_k = kritischen Druck, P_0 = Molekularrefraktion). Die Zahlen der letzten Spalte obenstehender Tabelle können auch als berechnet mittels dieser Beziehung angesehen werden.

5. Es kann schließlich verwunderlich erscheinen, daß ich geneigt bin, dem durch (6) ausgedrückten Zusammenhang mit der empirischen reduzierten Zustandsgleichung den Vorzug zu geben. Dazu führt mich nicht nur die Einfachheit jener Beziehung, sondern vor allem Bedenken gegen die genaue Gültigkeit der Keesomschen Reihenentwicklung, welche nicht einmal ihre Vervollständigung durch die Polarisationskräfte beseitigen könnte. Drei Hauptpunkte sind es, auf welche ich aufmerksam machen möchte.

1. Nur für größere Abstände ist es möglich, das elektrische Feld eines Moleküls im Mittel auf einen Quadrupol zurückzuführen. Für Abstände, welche nicht mehr groß sind gegenüber den Entfernungen der Einzelladungen im Molekül voneinander (und bis auf solche Entfernungen findet bei jedem Zusammenstoß Annäherung statt), ist es streng genommen unumgänglich, auch auf die höheren Glieder der Potentialentwicklung zu achten.

2. Die Keesomsche Reihenentwicklung wird erhalten unter Anwendung der Prinzipien der statistischen Mechanik. Sie enthält also z. B. implizite die Behauptung, daß die spezifische Wärme (bei konstantem Volumen) von Wasserstoff bei allen Temperaturen den Wert $\frac{3}{2}R$ hat. Dagegen zeigen bekanntlich die Euckenschen Messungen[1]), daß wenig unter 0° C schon die Quantenabweichungen von diesem Äquipartitionsgesetz sich bemerkbar machen. Noch prägnanter tritt dieser Umstand in Erscheinung bei den einatomigen Gasen. Dort ist (wie die Quantentheorie lehrt, infolge des kleinen Trägheitsmomentes) überhaupt keine mit der Temperatur veränderliche Rotationsenergie vorhanden. Dementsprechend verliert die Keesomsche Reihenentwicklung ganz ihre Bedeutung und die einzigen Kräfte, welche die auch hier ausgesprochen vorhandene Molekularattraktion erklären können, sind die Polarisationskräfte.

3. Die von Keesom berechnete Reihenentwicklung behandelt die Moleküle in bezug

1) A. Eucken, Berl. Ber. 141, 1912.

auf die Abstoßung als harte Kugeln. Es ist durchaus unwahrscheinlich, daß dieser Ansatz der Wirklichkeit entspricht. Gewiß ist nichts dagegen einzuwenden, diesen Ansatz zu benutzen, wenn es sich um eine erste Näherung handelt. Wenn aber die Genauigkeit so weit getrieben wird, daß wie es Keesom tut, in der Entwicklung noch das 14. Glied beibehalten wird, so ist meines Erachtens keine Gewähr mehr vorhanden für die Zuverlässigkeit eines so schematisierenden Ansatzes.

Überlegt man die Bedeutung dieser drei Bemerkungen mit Rücksicht auf ihre theoretische Verwertung, so sieht man sofort, daß die Bemerkung 3 am wesentlichsten ist. Es ist doch klar, daß die Kritik, welche in den ersten beiden enthalten ist, durch einige Arbeit gegenstandslos gemacht werden kann. Weder der genaueren Beschreibung des um ein Molekül vorhandenen elektrischen Feldes, noch der Übergang von der klassischen Statistik zur Quantentheorie bietet heutzutage prinzipielle Schwierigkeiten. Sofern man also zugibt, daß die anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen rein elektrischen Ursprunges sind (und ich sehe keinen Grund mehr, daran zu zweifeln), wird man in der nächsten Zukunft die notwendige Vervollständigung der Theorie erwarten können. Ganz anders liegen aber die Verhältnisse mit bezug auf die dritte Bemerkung. Offenbar handelt es sich hier um die Frage, ob es möglich ist, auch die abstoßenden Kräfte zwischen den Molekülen zu verstehen, und zwar als Folgeerscheinung des angenommenen elektrischen Aufbaus. Diese Frage scheint mir von prinzipieller Bedeutung, um so mehr, als sie nicht nur im Gebiete der Zustandsgleichung, sondern auch bei den festen Körpern eine wesentliche Rolle spielt. So wird z. B. die Unstabilität der Atomanordnung in den schönen Untersuchungen von Born über die Kräfte im Kristallgefüge nicht mehr bestehen, sobald es gelingt, die theoretische Notwendigkeit abstoßender Kräfte von besonderer in der statistischen Potentialtheorie nicht vorhergesehener Art darzutun. Zum Schluß möchte ich zeigen, wie dieses geschehen kann, ohne aber an dieser Stelle die Rechnungen weiter zu führen, als es für das Verständnis der wesentlichen Punkte notwendig ist.

6. Alle Erfahrungen deuten darauf hin, daß zwischen Molekülen eine universelle Abstoßung besteht. Aber ein Molekül ist immerhin ein kompliziertes Gebilde; auf der Suche nach einer Erklärung für die universelle Abstoßung ist also die erste zu beantwortende Frage die, ob dieser komplizierte Aufbau aus vielen Ladungen beim Zustandekommen jener Kraft eine prinzipielle Rolle spielt. Nun haben aber die früheren Versuche von Lenard[1]) über den Durchgang von Kathodenstrahlen durch Materie und die neueren Versuche von J. Franck[2]) und seinen Mitarbeitern unbedingt gezeigt, daß auch eine Einzelladung, ein Elektron, von einem Molekül im allgemeinen in genügender Nähe abgestoßen wird. Bekanntlich konnten sogar die Bewegungen langsamer Elektronen in Helium gedeutet werden unter der Annahme, daß die Heliumatome sich beim Zusammenstoß mit einem Elektron verhalten wie harte Kugeln. Wir werden dementsprechend unsere Frage vereinfachen können und nach einer abstoßenden Kraft zwischen einem freien Elektron und einem Molekül zu suchen haben.

Betrachten wir nun ein Molekül als ein aus Ladungen zusammengebautes, im ganzen aber ungeladenes Gebilde, so scheint die experimentell geforderte Abstoßung zu fehlen. Legt man nämlich um ein solches Gebilde eine Kugel, etwa vom Radius r und bestimmt das Oberflächenintegral des Potentials $\int \varphi \, d\sigma$ auf dieser Kugel, so findet man leicht den Wert:

$$\int \varphi \, d\sigma = 4\pi r \Sigma e ,$$

wobei Σe die Gesamtsumme aller umschlossenen Ladungen bedeutet. Ist also das Molekül im ganzen ungeladen, so ist das Oberflächenintegral Null. Neben Stellen, in denen das Potential negativ ist, wo demnach Arbeit zu leisten ist, um ein (negatives) Elektron hinzubringen, gibt es immer auch Bereiche, wo das Potential positiv ist. Wird das Elektron hierhin gebracht, so gewinnt man Arbeit, so daß ein Molekül oder Atom, sofern diese Überlegungen reichen, sich ganz anders zu verhalten hätte, als durch das Experiment nahegelegt wird.

Nun ist zugegeben, daß man bei allen bisherigen Überlegungen auskommen konnte, mit der obigen Annahme: das Molekül bestehe aus einer Ansammlung von ruhenden Ladungen. In Wirklichkeit sind aber die Ladungen in Bewegung und erzeugen um das Molekül ein nach Richtung und Größe wechselndes Feld. Die Annahme eines Systems ruhender Ladungen läuft darauf hinaus, daß mit Rücksicht auf die große Geschwindigkeit, mit der das Feld wechselt, mit dem zeitlichen Mittelwert der Feldstärken gerechnet wird. Es entsteht somit die Frage, ob nicht infolge dieser zeitlichen Veränderlichkeit trotz der kurzen Zeitdauer einer Periode doch Zusatzkräfte auftreten, welche für die beobachtete Abstoßung verantwortlich sind. Von diesem Standpunkt aus ist es nun zunächst von

1) Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Heidelberg, 1918.

2) J. Franck und G. Hertz, diese Zeitschr. **17**, 409 und 430, 1916; **20**, 132, 1919 (Zusammenfassende Bearbeitung).

Interesse, die momentanen Werte der Feldstärke in der Umgebung eines Moleküls mit ihren zeitlichen Mittelwerten zu vergleichen. Dabei zeigt sich dann sofort, daß jene Momentanwerte im allgemeinen wesentlich größer sind als die Mittelwerte.

Sei z. B. in Fig. 2 ein Wasserstoffatom angedeutet, bei dem ein Elektron von der Ladung

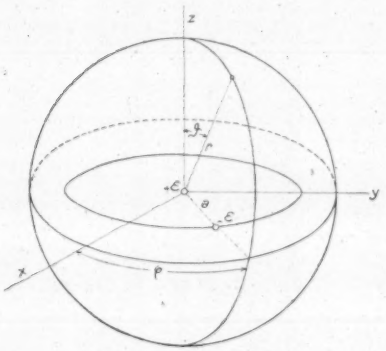


Fig. 2.

$-\varepsilon$ sich auf einen Kreis mit dem Radius a und der Winkelgeschwindigkeit ω um einen Kern von der Ladung $+\varepsilon$ in der ersten Quantenbahn bewegt und sei weiter um den Kern als Mittelpunkt eine Kugel vom Radius r gelegt, auf welcher die Lage eines Aufpunktes durch die Winkel ϑ und φ gegeben wird. In erster Näherung verhält sich dann ein solches Atom wie ein wechselnder Dipol und erzeugt ein Feld aus dem Potential:

$$\Phi_1 = -\frac{\varepsilon a}{r^2}\sin\vartheta\cos(\varphi - \omega t)$$

ableitbar. Erst in zweiter Näherung kommt ein Potential, das zum Teil zeitlich konstant ist. Dieser Teil hat den Wert:

$$\Phi_2 = \frac{\varepsilon a^2}{r^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sin^2\vartheta\right)$$

und entspricht dem Felde des von einem gleichmäßig mit negativer Elektrizität belegten Ringe umgebenen Kernes.

Aus Φ_1 berechnet sich ein mittleres Quadrat der Feldstärke $\overline{\mathfrak{E}_1^2}$ zu:

$$\overline{\mathfrak{E}_1^2} = \frac{\varepsilon^2}{a^4}\left(\frac{a}{r}\right)^6\left(\frac{3}{2}\sin^2\vartheta + 1\right),$$

aus Φ_2 entsprechend:

$$\overline{\mathfrak{E}_2^2} = \frac{\varepsilon^2}{a^4}\left(\frac{a}{r}\right)^8\frac{9}{4}\left(1 - 2\sin^2\vartheta + \frac{5}{4}\sin^4\vartheta\right).$$

In einem Abstand $r = 10\,a = 5{,}3\cdot 10^{-8}$ cm ergibt sich hieraus für den Maximalwert von $\sqrt{\mathfrak{E}_1^2}$ der Betrag $8{,}010^6$ Volt/cm und für den Maximalwert von $\sqrt{\mathfrak{E}_2^2}$ der Betrag $7{,}6\cdot 10^5$ Volt/cm. Die Amplitude der Feldstärkeschwankungen ist in diesem Beispiele also etwa 10mal so groß wie der zeitliche Mittelwert, im übrigen sind die außerordentlich großen Absolutwerte von Interesse. Nachdem somit festgestellt ist, daß der zeitlich veränderliche Teil der Feldstärke überwiegt und sogar um so mehr, je größer der Abstand vom Molekül ist. Fragen wir jetzt nach der mittleren Kraft, welche ein freies Elektron in einem zeitlich (und räumlich) veränderlichen Felde erfährt.

Die Zerlegung des Feldes in einen zeitlich konstanten und einen zeitlich variablen Teil sei so vorgenommen, daß der Mittelwert der zu letzterem gehörigen Feldstärke $\mathfrak{E}$ verschwindet. In diesem variablen Feld wird dann ein Elektron von der Masse μ und der Ladung $-\varepsilon$, Verschiebungen σ ausführen, welche durch die Gleichung:

$$\mu\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\varepsilon\mathfrak{E} \qquad (7)$$

bestimmt werden. So lange σ als genügend klein angesehen werden kann, ergibt sich die auf das Elektron wirkende momentane Kraft $\mathfrak{K}$, indem das Feld in der Umgebung der Ruhestelle nach Taylor entwickelt wird. So erhält man[1]):

$$\mathfrak{K} = -\varepsilon\mathfrak{E} - \varepsilon(\sigma V)\mathfrak{E}.$$

Es ist aber allgemein für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

$$V(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}V)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}V)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}].$$

Setzt man jetzt $\mathfrak{A} = \sigma$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, und bedenkt einerseits, daß $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0$ ist, so daß nach (7) auch $\mathrm{rot}\,\sigma = 0$, so wird:

$$V(\sigma\mathfrak{E}) = (\sigma V)\mathfrak{E} + (\mathfrak{E}V)\sigma.$$

Bildet man nun zeitliche Mittelwerte, so ist wegen (7):

$$\overline{(\sigma V)\mathfrak{E}} = -\frac{\mu}{\varepsilon}\overline{(\sigma V)\frac{d^2\sigma}{dt^2}} = -\frac{\mu}{\varepsilon}\overline{\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2}V\right)\sigma} = -\overline{(\mathfrak{E}V)\sigma},$$

so daß schließlich:

$$\overline{(\sigma V)\mathfrak{E}} = \tfrac{1}{2}V(\sigma\mathfrak{E}).$$

Für den zeitlichen Mittelwert der auf das Elektron wirkenden Kraft folgt nunmehr, da $\overline{\mathfrak{E}} = 0$:

1) V ist der bekannte symbolische Vektor mit dem Komponenten $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.

$$\overline{\mathfrak{K}} = -\nu \frac{\varepsilon}{2} (\sigma \mathfrak{E}) . \qquad (8)$$

Die mittlere Kraft folgt also als Grad. eines Potentials, d. h. das Elektron verhält sich so, als ob ihm in bezug auf das felderzeugende Molekül eine potentielle Energie U vom Betrage:

$$U = \frac{\varepsilon}{2} (\sigma \mathfrak{E}) \qquad (9)$$

innewohnt. Diese potentielle Energie hat indessen eine einfache Bedeutung. Multipliziert man nämlich beide Seiten der Bewegungsgleichung skalar mit σ und bildet dann den zeitlichen Mittelwert (durch Integration nach t und Division mit dem Zeitintervall Θ), so kommt nach partieller Integration:

$$\varepsilon \overline{(\sigma \mathfrak{E})} = -\mu \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta dt \left(\sigma \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \right) =$$

$$= -\mu \frac{1}{\Theta} \left[\left(\sigma \frac{d\sigma}{dt} \right) \right]_0^\Theta + \mu \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta \left(\frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\sigma}{dt} \right) dt .$$

Da aber das erste Glied bei genügend langer Zeit Θ verschwindet, heißt dieses:

$$\varepsilon \overline{(\sigma \mathfrak{E})} = 2 \overline{T},$$

wenn mit $\overline{T}$ die mittlere kinetische Energie des Elektrons bezeichnet wird. So entsteht schließlich der Satz:

Das pulsierende Elektron verhält sich so, als ob es in bezug auf das Molekül eine potentielle Energie besitzt gleich der kinetischen Energie seiner Schwankungen:

$$U = \overline{T}. \qquad (9')$$

Da letztere Energie notwendig positiv ist, so ist auch die scheinbar potentielle Energie positiv und da das Wechselfeld um so stärker wird, je näher man an das Molekül herankommt, so ist das nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache, daß zwischen einem Elektron und einem Molekül eine universelle Abstoßung besteht, welche um so größer wird, je näher Elektron und Molekül aneinander rücken[1]).

7. Es kommt mir an dieser Stelle nur darauf an, die Bedeutung dieser abstoßenden Kraft prinzipiell hervorzuheben. Deshalb möge es genügen, etwa für den Fall des Wasserstoffatoms noch kurz darauf hinzuweisen, daß die Größenordnung jener Kraft genügt, um eine Erklärung für die gaskinetisch beobachteten Moleküldurchmesser zu liefern. Läßt man etwa das Elektron sich dem H-Atom in Richtung der Z-Achse (vgl. Fig. 2) nähern, so berechnet man leicht für die durch das Wechselfeld hervorgerufene mittlere kinetische Energie der Schwankungen den Wert:

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^6 ,$$

wenn r der Abstand Elektron—Kern bedeutet. Das Elektron besitzt also infolge seiner Schwankungen in bezug auf das Atom eine positive potentielle Energie vom Betrage:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^6 . \qquad (10)$$

Andererseits wird es vom Kern statisch stärker angezogen, als vom weiter entfernten rotierenden Elektron und diesen Kräften entspricht in erster Näherung eine negative potentielle Energie U' vom Betrage:

$$U' = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^3 . \qquad (10')$$

Würde es gestattet sein, mit diesen Energiebeträgen auch noch für kleine Abstände zu rechnen, so würde:

$$U + U' = 0$$

werden für $r = a = 0{,}50 \cdot 10^{-8}$ cm, und dieser Wert würde den „Halbmesser" des H-Atoms darstellen, da die kinetische Energie der Wärmebewegung verschwindend klein ist gegenüber der Energie ε^2/a.

Offenbar wird es vom Bau des Moleküls abhängen, ob in jeder Annäherungsvorrichtung die positive über die negative potentielle Energie überwiegt oder ob es Annäherungsrichtungen gibt, in denen die negative potentielle Energie dauernd die Überhand hat. Je nachdem wird man experimentell sprechen von Atomen (Molekülen) ohne Elektronenaffinität, welche sich beim Stoß ähnlich wie harte Kugeln verhalten; oder man wird dem Atom (Molekül) eine Elektronenaffinität zuschreiben, welche um so größer ist, je größer der (räumliche) Winkelbereich, in dem die negative potentielle Energie überwiegt. Schließlich sei nur angedeutet, daß sich die Überlegungen auch auf die Kräfte zwischen ganzen Atomen und Molekülen übertragen lassen, womit zugleich die Möglichkeit entsteht, die Potentialkräfte im Bornschen Gitter durch die hier hervorgehobenen zu vervollständigen und damit auf dem angedeuteten dynamischen Weg zu verstehen, wie der Kristallbau mit rein elektrischen Kräften trotzdem stabil sein kann.

Zürich, 28. März 1921.

(Eingegangen 28. März 1921.)

1) Eine anschauliche Deutung für die abstoßenden Kräfte ergibt z. B. die Betrachtung des folgenden einfachen Spezialfalles. Ein Zentrum erzeugt in seiner Umgebung ein radial gerichtetes, zeitlich periodisches Feld. In diesem Felde wird ein Elektron radiale Schwingungen ausführen derart, daß es (nach dem Grundgesetz der Mechanik) von seiner Mittellage aus gesehen dem Kraftzentrum genähert ist, während der zeitlichen Periode der abstoßenden Kräfte und vom Kraftzentrum weiter entfernt ist, während der Anziehungsperiode. Nimmt nun die Amplitude des Wechselfeldes zu mit abnehmendem Abstande vom Zentrum, so überwiegt also im Mittel der Zeit die Abstoßung mit Rücksicht auf jene räumliche Variabilität.

Über den Einfluß von Sonne und Mond auf das Zentrifugalfeld der Erde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von A. Kopff.

Nach der Einsteinschen Gravitationstheorie ist das aus der klassischen Mechanik bekannte Zentrifugalfeld der Erde durch die Gesamtheit der angenähert gleichförmig verteilten Materie des Weltalls hervorgerufen[1]), also, wie wir annehmen müssen, durch die Gesamtheit aller Sterne (Nebelmassen, Sternsysteme). Einzelne Massen in der Nähe der Erde, vor allem Sonne und Mond, bedingen Zusatzglieder. Diese sind zeitlich veränderlich, aber, wie sich zeigen wird, so klein, daß sie gegenwärtig nicht nachgewiesen werden können.

Zur Herleitung dieser Zusatzglieder bedienen wir uns der ursprünglichen Einsteinschen Gravitationsgleichungen („erster Art"). In einem ruhenden Koordinatensystem setzen wir die durch eine Masse M in der Entfernung a vom Aufpunkt P (x_1, x_2, x_3) erzeugten Gravitationspotentiale in der von A. Einstein gegebenen Form[2]) an und erhalten, wenn die Zeitvariable reell gewählt wird, hierfür:

$$\begin{vmatrix} -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Die auf das mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um die x_3-Achse rotierende, gestrichene Koordinatensystem sich beziehenden Gravitationspotentiale lauten, wenn wir uns auf die erste Näherung der Bewegungsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie beschränken:

$$\left.\begin{aligned} g_{14}' &= +x_2'\omega'\left(1+\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}\right), \\ g_{24}' &= -x_1'\omega'\left(1+\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}\right), \\ g_{44}' &= +1-(x_1'^2+x_2'^2)\omega'^2-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}- \\ &\quad -(x_1'^2+x_2'^2)\omega'^2\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}, \end{aligned}\right| \tag{2}$$

wobei hier in hinreichender Näherung[3]):

$$\left.\frac{1}{a}=\frac{1}{R}\left|1+\frac{1}{R}\left(x_1'\sin\vartheta_0\cos\varphi_0+\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.+x_2'\sin\vartheta_0\sin\varphi_0+x_3'\cos\vartheta_0\right)\right| \tag{3}$$

gesetzt werden kann. R, ϑ_0 (Poldistanz) und φ_0 sind die Polarkoordinaten der Masse M im gestrichenen System. Die übrigen g_{ik}' kommen nicht in Frage.

Wir beschränken jetzt unsere Betrachtung auf die Zentrifugalkräfte, also auf g_{44}', allein. Das Glied $[+1-(x_1'^2+x_2'^2)\omega'^2]$ führt auf die gewöhnlichen Zentrifugalkräfte[1]); $-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}$ auf die durch die Masse M verursachte Newtonsche Gravitationsbeschleunigung. Die durch die Masse M bedingten Zusatzglieder der Zentrifugalkraft sind durch das letzte Glied von g_{44}' hervorgerufen. Man erhält für die drei Komponenten der Zentrifugalbeschleunigung die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1'}{\partial t^2} &= +\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}\omega'^2 x_1'+ \\ &\quad +\frac{\varkappa}{8\pi}\frac{M}{R^2}\omega'^2(x_1'^2+x_2'^2)\sin\vartheta_0\cos\varphi_0, \\ \frac{\partial^2 x_2'}{\partial t^2} &= +\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}\omega'^2 x_2'+ \\ &\quad +\frac{\varkappa}{8\pi}\frac{M}{R^2}\omega'^2(x_1'^2+x_2'^2)\sin\vartheta_0\sin\varphi_0, \\ \frac{\partial^2 x_3'}{\partial t^2} &= +\frac{\varkappa}{8\pi}\frac{M}{R^2}\omega'^2(x_1'^2+x_2'^2)\cos\vartheta_0. \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Am größten sind jeweils die ersten Glieder der beiden ersten Beschleunigungskomponenten. Befinden wir uns im Äquator, und legen wir die x_1'-Achse in den Radiusvektor nach dem Beobachtungsort, so erhalten wir also für die Schwerebeschleunigung genähert das Zusatzglied:

$$\Delta g = -\frac{\partial^2 x_1'}{\partial t^2} = -\frac{2k}{c^2}\frac{M}{a}\omega'^2 x_1', \tag{5}$$

wobei k die Newtonsche Gravitationskonstante bedeutet. Für die Sonne ergibt sich bei einem

1) Vgl. A. Kopff, Bemerkung zur Rotationsbewegung im Gravitationsfeld der Sterne. II. Diese Zeitschr. **22**, 179, 1921.

2) Einstein, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berl. Sitzungsber. 1916, S. 692.

3) Vgl. H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. Diese Zeitschr. **19**, 33, 1918

1) A. Kopff, a. a. O., Gleichung (3).

mittleren Wert von a $\Delta g = -7 \cdot 10^{-9}$ cm/sec², für den Mond $\Delta g = -1 \cdot 10^{-7}$ cm/sec². Diese Beträge befinden sich weit unter der durch Pendelbeobachtungen erreichbaren Genauigkeit. Die übrigen Glieder sind noch erheblich kleiner; vor allem ist die zeitliche Änderung ganz unbedeutend. Auch die räumlichen Differentialquotienten von Δg liegen weit unterhalb der Grenze der mit der Drehwage meßbaren Größen.

Heidelberg-Königstuhl, März 1921.

(Eingegangen 10. März 1921.)

Bemerkung zu den Grundlagen der Relativitätstheorie. II.

Von K. Wessely.

Dauer einer Bewegung.

Ist die Ortszeit längs der ξ-Achse bestimmt durch eine Beziehung:

$$\tau = \lambda (t + \mu \xi), \tag{I}$$

so kann als Dauer einer Bewegung die Differenz der Ortszeiten am Beginn und Ende der Bewegung bezeichnet werden. Unter einer in Ortszeit gemessenen Geschwindigkeit ist dann

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\xi}{\lambda (dt + \mu d\xi)}$$

zu verstehen, woraus folgt:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\lambda \frac{d\xi}{d\tau}}{1 - \lambda \mu \frac{d\xi}{d\tau}}. \tag{1}$$

Bewegt sich die ξ-Achse längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = v$ und sollen für eine beliebige Geschwindigkeit V längs der x-Achse die relativen Geschwindigkeiten $V - v$ und $-(V + v)$ numerisch gleiche Werte für $\frac{d\xi}{d\tau}$ ergeben, so folgt, — wie früher —[1])

$$\mu = -\frac{v}{V^2 - v^2};$$

$\frac{d\xi}{d\tau}$ wird dann gleich $\pm \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{V^2 - v^2}{V}$; oder wenn $\lambda = \frac{\sqrt{V^2 - v^2}}{V}$ gewählt wird:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \pm \lambda \cdot V.$$

Wird die Beziehung: $\xi = x - vt$ ersetzt durch

$$\xi' = \frac{1}{\lambda} \xi = \frac{1}{\lambda} (x - vt), \tag{II}$$

so folgt:

$$\frac{d\xi'}{d\tau} = \pm V \text{ oder } \xi' = \pm V \cdot \tau.$$

Die beiden Substitutionen I und II nebst $y = \eta$, $z = \zeta$ werden daher die Gleichung einer mit konstanter Geschwindigkeit sich ausbreitenden Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2$$

in

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \cdot \tau^2$$

überführen, wo der Kürze halber wieder ξ statt ξ' geschrieben ist. Einem bestimmten Wert von t, dem für $y = 0$, $z = 0$ zwei numerisch gleiche Werte von x zugehören, sind aber zwei numerisch verschiedene Werte von ξ und daher auch von τ zugeordnet. Die geometrische Bedeutung der beiden Gleichungen an sich ist daher unbestimmt und verschieden je nach der Phasenverschiebung, welche für die Definition der Ortszeit in Betracht kommt. Konzentrische Kugelflächen werden durch die Gleichungen nur dann dargestellt, wenn diese Phasendifferenz gleich Null ist.

Bildet man aus (1) die Summe $v + \frac{d\xi}{dt}$, so ergibt sich unmittelbar (gleichgültig wie groß λ oder die Drehgeschwindigkeit der τ-Uhren ist), das Einsteinsche Additionstheorem:

$$v + \frac{d\xi}{dt} = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}},$$

wenn unter w die mit $\frac{\lambda \cdot V^2}{V^2 - v^2}$ multiplizierte Geschwindigkeit $\frac{d\xi}{d\tau}$ verstanden wird.

Für $v = V$ wird $v + \frac{d\xi}{dt} = V$ oder: es gibt keine „Über-Lichtgeschwindigkeit". Es gibt aber auch keine „Über-Schallgeschwindigkeit"; denn die Gleichungen müssen auch für $V = 333^m$ gelten. Werden die Geschwindigkeiten v und V gleich groß angenommen, so werden die Voraussetzungen der Rechnung inhaltslos; μ wird unendlich, der Ausdruck für $\frac{d\xi}{dt}$ wird Null und daher $v + \frac{d\xi}{dt}$ gleich V, ohne daß der Wert von V selbst einer Beschränkung unterliegen würde.

Für $V = \infty$ wird μ gleich Null, die Ortszeit geht über in die gemeinsame Zeit und die Gleichzeitigkeit im gewöhnlichen Sinne, die durch den steten Parallelismus der Uhrzeiger definiert

1) Diese Zeitschr. 21, 549, 1920.

wäre, wird ein spezieller Fall der Gleichzeitigkeit im Einsteinschen Sinne.

Die Bewegung eines starren Körpers und das Dopplersche Prinzip.

Bei Einführung der Ortszeit durch eine Substitution $\tau = t + \beta x$ werden einem bestimmten Wert von t für verschiedene Punkte x verschiedene Werte von τ zugeordnet und umgekehrt.

Zwei Punkten x_1, x_2, die sich mit konstanter Geschwindigkeit α in einem konstanten Abstand R, gemäß:

$$x_1 = \alpha t$$
$$x_2 = \alpha t + R$$

bewegen, werden daher durch einen bestimmten Wert von τ zwei Punkte zugeordnet:

$$x_1' = \alpha(\tau - \beta x_1'),$$
$$x_2' = \alpha(\tau - \beta x_2') + R,$$

deren Abstand gleich ist:

$$x_2' - x_1' = \frac{R}{1 + \alpha\beta}.$$

Ebenso ändert sich auch die Maßzahl für die Dauer der Bewegung, da:

$$\tau = t + \beta x = (1 + \alpha\beta) \cdot t.$$

Diese Änderungen in der Maßzahl der Zeitdauer und in der Länge des bewegten Körpers beim Übergang von „gemeinsamer" Zeit zu Ortszeit, sind identisch mit der scheinbaren Änderung von Frequenz und Wellenlänge einer fortschreitenden Welle, wie sie das Dopplersche Prinzip fordert; denn der gleichförmigen Drehung eines Punktes im Kreise (einer Uhr) entspricht als Projektion eine harmonische Bewegung; und einer Reihe von Uhren, deren Zeiger um einen ihrem Abstande proportionalen Betrag βx verstellt sind, entspricht als Projektion der Uhrzeigerstellungen eine mit Phasenverschiebung schwingende Punktreihe, oder eine mit der Geschwindigkeit $\gamma = -\frac{1}{\beta}$ fortschreitende Welle. Führt man in den Faktor $1 + \alpha\beta$ diese Geschwindigkeit ein, so folgt: $1 + \alpha\beta = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma}$; d. h. die Zeitablesung an der mit der Geschwindigkeit γ fortschreitenden Welle ist für den mit der Geschwindigkeit α fortschreitenden Beobachter das $\frac{\gamma - \alpha}{\gamma}$fache der „$t$"-Zeit, wie es dem Dopplerschen Prinzip entspricht.

Ist die Ortszeit längs der bewegten ξ-Achse speziell durch die Gleichung (I) gegeben, oder mittels (II) als Funktion von x dargestellt durch

$$\tau = \lambda(t + \mu\xi) = \frac{1}{\lambda}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

so folgt, daß zwei Punkten x_1, x_2, die sich in dem starren Abstande R längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit V bewegen, nach Einführung der Ortszeit zwei Punkte x_1', x_2' zugeordnet sind, deren Abstand gleich ist:

$$\frac{R}{1 + \alpha\beta} = \frac{R}{1 - V \cdot \frac{v}{V^2}} = \frac{R \cdot V}{V - v}.$$

In derselben Weise wird einem durch Gleichung (II) mit $\lambda \cdot \xi$ bezeichneten konstanten Abstand $x - vt$ beim Übergang zur Ortszeit, ein Abstand:

$$\frac{\lambda\xi}{1 + \alpha\beta} = \frac{\lambda\xi \cdot V^2}{V^2 - v^2} = \frac{\xi}{\lambda}$$

zugeordnet, so daß einer auf der ξ-Achse ruhenden Kugel:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

ein längs der x-Achse fortschreitendes Ellipsoid mit den Halbachsen

$$\lambda R,\ R,\ R$$

entspricht.

Werden in die Gleichung einer mit der Geschwindigkeit V längs der x-Achse fortschreitenden Kugel

$$(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

die beiden Substitutionen (I) und (II) eingeführt, so muß hiernach die Gleichung übergehen in die eines Ellipsoids mit den Halbachsen

$$\frac{V}{V - v} \cdot \lambda \cdot R,\ R,\ R.$$

Bedeutet

$$\sigma = M \sin 2n\pi\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

eine periodische „Verschiebung", so ist die in einer ebenen Welle von der Länge R und dem Querschnitt q enthaltene lebendige Kraft:

$$L = \int_0^R \frac{1}{2} q \cdot \varrho \cdot dx \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{q\varrho}{2} 4\pi^2 n^2 M^2 \cdot \frac{R}{2}$$

dem Quadrat der Frequenz und der ersten Potenz der Wellenlänge proportional. Da sich bei der Transformation die Frequenz verkehrt proportional zur Wellenlänge ändert, so folgt:

$$L' = L \cdot \frac{V \cdot \lambda}{V - v} \cdot \left(\frac{V - v}{V \cdot \lambda}\right)^2 = \sqrt{\frac{V - v}{V + v}},$$

und da bei ebenen fortschreitenden Wellen die potentielle Energie immer gleich der kinetischen ist, so folgt auch unmittelbar für den totalen Energieinhalt der beiden einander zugeordneten Wellen:

$$E' = E \cdot \sqrt{\frac{V - v}{V + v}}.$$

Diese von Einstein aus den Maxwell-

schen Gleichungen abgeleitete Beziehung ist eine mathematische Konsequenz des angewendeten Maßsystems, das dem Dopplerschen Prinzip angepaßt ist, und gilt für jeden Wert von V.

Ob das Dopplersche Prinzip in der üblichen Form: $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{V-v}{V}$ oder in der Einsteinschen Form: $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{V-v}{V\cdot\lambda}$ geschrieben wird, ist dem Inhalte nach gleich; denn die zweite Schreibweise bezieht sich auf die Messung mit einer Uhr, die „in Wirklichkeit" λ mal so schnell geht als die im ersten Fall vorausgesetzte.

Grundsätzlich verschieden von diesen Rechnungsweisen ist die Bestimmung der Abhängigkeit einer Masse von ihrer Geschwindigkeit.

Für die mit konstanter Geschwindigkeit v bewegte ξ-Achse ist nach (II)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2x}{dt^2}$$

und $$d\tau = \lambda\, dt,$$

daher: $$m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{m}{\lambda^3}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Bildet man hieraus die „im ruhenden System gemessene" lebendige Kraft:

$$\int_0^v \frac{m}{\lambda^3} v\, dv = mV^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} - 1\right],$$

so liegt der Rechnung die Annahme zugrunde, daß eine mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegte — daher bezüglich der ξ-Achse ruhende — Masse m durch eine Kraft X nach dem Gesetze $m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = X$ beschleunigt wird, wobei ξ und τ mit x und t durch die Gleichungen (I) und (II) zusammenhängen. Das ist eine physikalische Hypothese, die durch die Erfahrung zu überprüfen ist, und die, wenn sie für beliebige Geschwindigkeiten v gilt, natürlich nicht auch für beliebige Werte von V gelten kann.

Wien, 16. März 1921.

(Eingegangen 21. März 1921.)

Ein einfaches Ausgleichungsverfahren für parabolische Funktionen zweiten und dritten Grades.

Von H. Schwerdt.

Während die Ausgleichung linearer Funktionen stets mit hinreichender Genauigkeit auf graphischem Wege vorgenommen werden kann, liegt bei parabolischen Funktionen schon zweiten und erst recht dritten Grades häufig das Bedürfnis nach einer numerischen Ausgleichung vor. Das graphische Verfahren gestattet bei Funktionen zweiten Grades im allgemeinen dann eine bequeme Anwendung, wenn die Funktion nur zwei wesentliche Konstanten enthält oder wenn ein Beobachtungswertepaar möglichst genau festliegt, etwa der o-Punkt. Bei Funktionen dritten Grades müssen entsprechend zwei Daten festliegen, etwa ein Beobachtungspunkt und die zugehörige Kurventangente oder dergleichen. Es lassen sich dann die in einer früheren Arbeit besprochenen Methoden der geometrischen Abbildung (Anamorphose) anwenden[1]).

Ist die Anzahl der wesentlichen Konstanten aber größer als zwei, so läßt sich dieses Verfahren nicht mehr leicht anwenden. Man hat deshalb bei Funktionen mit mehr als zwei wesentlichen Parametern häufig auf die Ausgleichung nach der kleinsten Quadratsumme verzichtet und hat die Funktionen den empirischen Wertereihen nach anderen Gesichtspunkten angeglichen[2]).

Führt man die numerische Ausgleichung der Funktion 3. Grades allgemein durch, so ist diese Arbeit mit einem erheblichen Aufwand an Hilfsrechnungen verknüpft. Die folgende Arbeit zeigt, daß durch besondere Wahl des Bezugssystemes und durch geeignete Summenbildungen die Ausgleichung nach der kleinsten Quadratsumme ohne rechnerische Schwierigkeiten ausführbar ist. Es ist möglich, in den Funktionen

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \qquad (1)$$

und

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \qquad (2)$$

mit Hilfe einer im folgenden hergeleiteten und wiedergegebenen Zahlentafel die gesuchten Koeffizienten α bis δ der Beobachtungsreihe

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;\ \ldots\ldots\ x_n, y_n \qquad (3)$$

in wenigen Rechenschritten anzugleichen, so daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird.

Bei vielen Beobachtungsreihen ist es möglich, die Auswahl der Beobachtungen äquidistant in x vorzunehmen. Unter der Annahme, daß die Auswahl in dieser Weise getroffen wird, werde das konstante Intervall der x mit i bezeichnet:

1) Stanton, Transact. Inst. Naval. Archit. 1912; Gümbel, Jahresber. d. Schiffsbautechn. Ges. **14**, 491, 1913; Schwerdt, diese Zeitschr. **18**, 45—53, 1917; **20**, 362—368, 1919.

2) Pirani, Zeitschr. f. Vermessungswesen **46**, 137 bis 146, 1917; Tobin, Phil. Mag. (6) **40**, 513—515, 1920; Heidke, Meteorolog. Zeitschr. **37**, 36—37, 1920; Schwerdt, Zeitschr. f. Vermessungswesen **49**, 593—634, 1920.

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \ldots = x_n - x_{n-1} = i. \quad (4)$$

Das Koordinatenkreuz xy kann nun jedesmal derart gelegt werden, daß die y-Achse durch den Schwerpunkt der Beobachtungspunkte geht, d. h. man legt die y-Achse so, daß die x-Werte zu beiden Seiten gleich verteilt sind. Es entspricht bei der oben getroffenen Auswahl der Beobachtungen jedem x ein gleich großer negativer Wert. Aus Gründen der Symmetrie gelten dann für die folgenden Summen die Identitäten:

$$\Sigma x = 0;\ \Sigma x^3 = 0;\ \Sigma x^5 = 0;\ \text{usw.} \quad (5)$$

Es soll die Ausgleichung zuerst für die Funktion dritten Grades durchgeführt werden.

In bezug auf das Koordinatensystem xy laute die Gleichung (2), die die Wertepaare (3) ausgleicht:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3. \quad (6)$$

Bildet man

$$v_n = y_n - (a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3),$$

so ergibt sich das Minimum von Σv^2 unter Berücksichtigung der Identitäten (5) aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \Sigma v^2}{\partial a_0} &= n \cdot a_0 - \Sigma y + a_2 \Sigma x^2 = 0,\\
\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \Sigma v^2}{\partial a_1} &= a_1 \cdot \Sigma x^2 - \Sigma xy + a_3 \Sigma x^4 = 0,\\
\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \Sigma v^2}{\partial a_2} &= a_2 \cdot \Sigma x^4 - \Sigma x^2 y + a_0 \Sigma x_2 = 0,\\
\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \Sigma v^2}{\partial a_3} &= a_1 \Sigma x^4 - \Sigma x^3 y + a_3 \Sigma x^6 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wenn man die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}
S_0 = \frac{\Sigma y}{n};\ S_1 = \frac{\Sigma xy}{n};\ S_2 = \frac{\Sigma x^2 y}{n};\ S_3 = \\
= \frac{\Sigma x^3 y}{n}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

in (7) einsetzt, so sind $a_0 \ldots a_3$ die Lösungen der beiden Gleichungssysteme:

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= a_0 + a_2 \cdot \frac{\Sigma x^2}{n}\\
S_2 &= a_0 \frac{\Sigma x^2}{n} + a_2 \cdot \frac{\Sigma x^4}{n}
\end{aligned}\right| \quad (9a)$$

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \cdot \frac{\Sigma x^2}{n} + a_3 \cdot \frac{\Sigma x^4}{n}\\
S_3 &= a_1 \cdot \frac{\Sigma x^4}{n} + a_3 \cdot \frac{\Sigma x^6}{n}
\end{aligned}\right| \quad (9b)$$

Hieraus lassen sich die gesuchten Koeffizienten sofort finden.

Ein besonderer Rechenvorteil bietet sich nun dadurch dar, daß die Summen

$$\frac{\Sigma x^2}{n},\ \frac{\Sigma x^4}{n} \text{ und } \frac{\Sigma x^6}{n}$$

nicht in jedem Falle einzeln berechnet zu werden brauchen, sondern sich einfach aus dem konstanten Intervall i (4) und der Anzahl der Beobachtungen finden lassen[1]). Auf diese Weise wird man zu Faktoren geführt, die allgemein für jede Ausgleichung Geltung behalten.

Aus der äquidistanten Wahl der x-Werte folgt nämlich:

$x_1 = x_1$,

$x_2 = x_1 + i$,

$x_n = x_1 + (n-1)\,i$, $0 = \Sigma x = n x_1 + i \frac{n \cdot (n-1)}{2}$,

d. h. es ist

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{i}{2}(-n+1),\\
x_2 &= \frac{i}{2}(-n+3),\\
x_3 &= \frac{i}{2}(-n+5),\\
&- - - - - - - -\\
x_n &= \frac{i}{2}[-n+(2n-1)].
\end{aligned}\right| \quad (10)$$

Aus der binomischen Entwicklung folgen dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\text{a)}\quad \Sigma x^2 &= \frac{i^2}{4}(n^3 - 2n \cdot s_1 + s_2),\\
\text{b)}\quad \Sigma x^4 &= \frac{i^4}{16}(n^5 - 4n^3 \cdot s_1 + 6n^2 s_2 - \\
&\quad - 4n s_3 + s_4),\\
\text{c)}\quad \Sigma x^6 &= \frac{i^6}{64}(n^7 - 6n^5 s_1 + 15n^4 s_2 - \\
&\quad - 20n^3 s_3 + 15n^2 s_4 - 6n s_5 + s_6),
\end{aligned}\right| \quad (11)$$

wenn zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}
s_1 &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1),\\
s_2 &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2,\\
&- - - - - - - - - - - -\\
&- - - - - - - - - - - -\\
s_6 &= 1^6 + 3^6 + 5^6 + \ldots + (2n-1)^6
\end{aligned}\right| \quad (12)$$

eingeführt werden.

Diese Summen, die in Beziehung zur Bernoullischen Funktion stehen, lassen sich in geschlossener Form darstellen[2]):

$$\left.\begin{aligned}
s_1 &= n^2,\\
s_2 &= \frac{1}{3}\cdot n \cdot (4n^2 - 1),\\
s_3 &= n^2 \cdot (2n^2 - 1),\\
s_4 &= \frac{n}{15}(4n^2 - 1)(12n^2 - 7),\\
s_5 &= \frac{n^2}{3}(16n^4 - 20n^2 + 7),\\
s_6 &= \frac{n}{21}(4n^2 - 1)(48n^4 - 72n^2 + 31).
\end{aligned}\right| \quad (13)$$

1) Roeser, Scientific Pap. Bur. Stand. Washington 1920, S. 363—375.

2) Vgl. hierzu z. B. Auerbach und Rothe, Taschen-

Die praktische Ausrechnung dieser und höherer Reihen geschieht am besten auf folgendem Wege. Bezeichnet s_λ die Summe der λten Potenzen der ungeraden Zahlen bis $(2n-1)$, $S_\lambda(2n)$ die Summe der λten Potenzen aller ganzen Zahlen von 1 bis $2n$, so gilt

$$s_\lambda = S_\lambda(2n) - 2 \cdot S_\lambda(n).$$

Die Funktion $S_\lambda(n)$ wird entweder mit einer von Euler angegebenen Rekursionsform[1]), oder nach einem Jacobischen Verfahren[2]) berechnet. Man setzt

$$n \cdot (n+1) = z,$$

dann ergibt sich

$$S_1 n = \frac{1}{4} z^2, \quad S_2 n = \frac{1}{6} z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right), \text{ usw.}$$

Setzt man die Werte (13) in (11) ein, so folgt nach einigen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sum x^2}{n} &= \frac{i^2}{12}(n^2-1) = i^2 \cdot u, \\ \frac{\sum x^4}{n} &= \frac{i^4}{240}(n^2-1)(3n^2-7) = i^4 \cdot v, \\ \frac{\sum x^6}{n} &= \frac{i^6}{1344} \cdot (n^2-1)(3n^4-18n^2+ \\ &\quad + 31) = i^6 \cdot w. \end{aligned}\right| \quad (14)$$

Hierin sind die Zahlenwerte u, v und w lediglich von der Anzahl n der Beobachtungen abhängig, sie sind für die gebräuchlichen Werte von n ein für allemal berechnet worden.

Unter Einführung der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} C_{00} &= \frac{v}{v-u^2}; \quad C_{02} = C_{20} = -\frac{u}{v-u^2}; \\ C_{22} &= \frac{1}{v-u^2}; \\ C_{11} &= \frac{w}{uw-v^2}; \quad C_{13} = C_{31} = -\frac{v}{uw-v^2}; \\ C_{33} &= \frac{u}{uw-v^2} \end{aligned}\right| \quad (15)$$

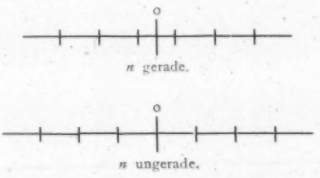
ergibt sich dann aus dem System (9) die gesuchte Lösung:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= S_0 \cdot C_{00} + \frac{S_2}{i^2} \cdot C_{02}; \\ a_1 &= \frac{S_1}{i_2} \cdot C_{11} + \frac{S_3}{i^4} \cdot C_{13}; \\ a_2 &= \frac{S_0}{i^2} \cdot C_{20} + \frac{S_2}{i^4} \cdot C_{22}; \\ a_3 &= \frac{S_1}{i^4} \cdot C_{31} + \frac{S_3}{i^6} \cdot C_{33}. \end{aligned}\right| \quad (16)$$

Die Indizes der konstanten Faktoren C lassen sofort den Koeffizienten a erkennen und die zugehörige Summe S. Der erste Index bezieht sich nämlich auf den Koeffizienten a, der zweite Index auf die Summe S, zu der der betreffende Faktor tritt. Die Summe der Indizes gibt schließlich die Potenz von i an, die in dem einzelnen Gliede im Nenner berücksichtigt werden muß.

Zusammenfassung.

Die Ausgleichung geht nun im einzelnen Falle derart vor sich, daß man die y-Achse durch den Schwerpunkt der Beobachtungswerte legt. Der Konstanz von i wegen ergibt sich dabei stets ein einfaches Bild:



Darauf bildet man die Summen (8) und entnimmt der folgenden Tabelle die Faktoren C. Die Gleichungen (16) liefern die gesuchten Koeffizienten a_0 bis a_3. Die Summenbildung (8) wird durch den Umstand der Symmetrie der x-Werte noch erheblich erleichtert, indem man nämlich das erste und letzte, zweite und vorletzte Wertepaar usw. zusammenfaßt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_n, \\ x_2 &= -x_{n-1}, \\ &\text{— — — —}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von S_1 bzw. S_3 multipliziert man die erste bzw. dritte Potenz des numerisch gleichen x-Wertes mit der Differenz, bei der Berechnung von S_2 den Wert x^2 mit der Summe der beiden symmetrisch gelegenen Ordinaten. Dadurch wird die Anzahl der notwendigen Multiplikationen stets auf die Hälfte vermindert.

Bei der Ableitung und Aufstellung der Formeln ist darauf Rücksicht genommen worden, daß es sich bei der Ausgleichung um eine Kurvenschar handeln kann, d. h. daß mehrere (x, y)-Reihen vorliegen können. Wenn dies aber nicht der Fall ist, also nur die Ausgleichung einer Wertereihe vorliegt, so kann man natürlich das Koordinatensystem so wählen, daß auch $\sum y = 0$ wird, d. h. daß der o-Punkt in den Schwerpunkt der Beobachtungspunkte fällt. Dadurch ergeben sich für a_0 und a_2 in (16) einfachere Ausdrücke.

buch, 3. Jahrg., S. 94, 96, 64, 1913. Dort sind die Formeln s_1 bis s_3 angegeben.

1) Hagen, Synopsis I, 84—90.

2) Jacobi, Crelle 12, 271, 1834.

Anzahl d. Beobachtung. n	C_{00}	$-C_{02}=-C_{20}$	C_{22}	C_{11}	$-C_{13}=-C_{31}$	C_{33}
5	2,4286	0,71429	0,35714	4,5139	1,18056	0,347222
6	3672	46875	16071	2,6216	0,46759	092593
7	3333	33333	083333	1,8380	22685	32407
8	3125	25000	047619	3428	12458	13408
9	2987	19481	029221	0324	0,074495	0,0063131
10	2890	15625	018939	0,81605	47429	32375
11	2822	12821	012821	66417	31695	17806
12	2768	10714	0,0089912	55174	22015	10360
13	2727	090909	64935	46600	15783	0,00063131
14	2695	078125	48077	39904	11618	39993
15	2670	067873	36361	34569	0,0087460	26186
16	2649	059524	28011	30206	67124	17641
17	2632	052632	21930	26693	52388	12211
18	2618	046875	17415	23736	42355	0,000085999
19	2605	042017	14006	21248	33299	61893
20	2595	037879	11392	19178	27097	45427
21	2586	034325	0,00093613	17322	22180	33709
22	2578	031250	77640	15757	18370	25426
23	2571	028571	64935	14399	15349	19439
24	2566	026224	54728	13205	12920	15015
25	2560	024155	46451	12156	10956	11730
26	2556	022321	39683	11228	0,00093518	0,0000092546
27	2552	020690	33907	10402	80312	73681
28	2548	019231	29472	0,096651	69361	59156
29	2545	017921	25602	090037	60216	47866
30	2542	016741	22346	084082	52531	39013
31	2539	015674	19592	078700	46036	32014

Handelt es sich um die Ausgleichung der Funktion (1), so gilt dem System (7) entsprechend:

$$\frac{\Sigma y}{n} = a_0 + a_2 \frac{\Sigma x^2}{n},$$

$$\frac{\Sigma xy}{n} = a_1 \frac{\Sigma x^2}{n},$$

$$\frac{\Sigma x^2 y}{n} = a_0 \frac{\Sigma x^2}{n} + a_2 \frac{\Sigma x^4}{n}.$$

Hieraus folgt, daß sich die Werte a_0 und a_2 in gleicher Weise aus (16) ergeben, während sich aus (11) für a_1 der Wert ergibt:

$$a_1 = \frac{S_1}{i^2} \cdot \frac{1}{u}\,^{1}). \qquad (17)$$

1) Roeser gibt in der zitierten Arbeit eine Ausgleichung der Parabel (1) unter der Voraussetzung $S_0 = 0$. Er gibt die Tabelle für u und C_{02} und setzt $a_2 = -\frac{a_0}{i^2 u}$.

(Eingegangen 21. Februar 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Untersuchungen über Aufbau und Zusammenschluß der Maßsysteme.[1])

Von W. Porstmann.

In der Entwicklung der Maße der Physik, Chemie, Technik und Wirtschaft können wir in den letzten Jahrzehnten deutlich eine bestimmte Strömung erkennen. Man versucht allenthalben die Maße verschiedener Maßgebiete einander anzupassen, über- oder unterzuordnen. Beispielsweise wurden die elek-

1) Stark gekürzte Wiedergabe des ersten Teiles einer gleichnamigen Dissertation. Die Arbeit ist als selbständige Schrift geheftet zu beziehen durch die Geschäftsstelle des Normenausschusses der deutschen Industrie, Berlin NW 7, Sommerstr. 4a. Preis 4,75 M. zuzüglich Porto und Packung. Format der vorliegenden Zeitschrift. 37 Seiten.

Inhalt:

Einführung
2 Isolierte Maße
3 Bildung von Maßsystemen

Mengenmessung
4 Anschauliche Zahl und Zahlenreihe
5 Gruppenbildung und Mengennormen
6 Die Mengennorm
7 Das lateinische Zeichensystem
8 Begriff, Wort und Zeichen
9 Das arabische Zeichensystem
10 Die Dreistellenregel

Die Normung der Normensysteme
11 Die Aufgabe
12 Begriff und Zeichen
13 Dreistellenregel
14 Die Verschiebung der Einheiten
15 Flächenmaße
16 Raummaße
17 Die drei Maßbereiche
18 Das Universalsystem
19 Winkel und Zeit
20 Abgeleitete Normen
21 Berufsmaße und allgemeine Maße

trischen Maßeinheiten genauest mit den Maßen der Mechanik in Zusammenhang gebracht. Dieser Vorgang ist noch bei weitem nicht zu Ende. So ist die Ausarbeitung der entsprechenden Beziehungen etwa zwischen der Lichtmessung und den Maßen der Mechanik heute noch nicht gelungen. Andrerseits sind die Maße der Elektrizität, der Mechanik und des Magnetismus bereits zu einem größeren, in sich harmonisch geordneten Maßgebiet verarbeitet, das die Handhabung der Beziehungen zwischen diesen Wissenschaftszweigen wesentlich erleichtert. Bevor an die Vereinigung derartig grundverschiedener Maßgebiete unter einheitliche Gesichtspunkte herangegangen werden konnte, hatten sich in jedem der Gebiete selbständige, unabhängige Maße und Maßsysteme entwickelt. Die Prinzipien der gegenwärtigen Lichtmessung stellen noch ein derartiges abgesondertes Gebiet dar. Ein älteres, einfacheres Beispiel für solchen „Zusammenschluß der Maßsysteme" ist das metrische Maß- und Gewichtssystem. Es vereinigt die Messung der Länge, der Fläche, des Raumes und des Gewichts. Vor dieser Vereinigung stand allenthalben die Gewichtsmessung ähnlich isoliert da gegenüber der Dimensionsmessung wie heute noch die Lichtmessung. Es bedarf keiner Worte weiter, um die Zusammenfassung wesensverschiedener Maßgebiete mit Hilfe der ihnen gemeinsamen Grundlagen und natürlichen Beziehungen als einen neuzeitlichen Zug in der Entwicklung der Maßlehre erkennen zu lassen.

Ehe aber die Systeme wesensverschiedener Maßgebiete untereinander zusammengeschlossen werden können, müssen sie schon eine ziemliche Ausbildung in ihrer Isoliertheit erfahren haben, die, wenigstens bei den allgemeinen Maßen, schon in frühesten Kulturzeiten der Völker einsetzt. Schon in den ersten Kulturanfängen bilden die Völker aller Art Verfahren zur Längen- und Raummessung aus, ebenso zur Bewältigung von Gewichts- und Wertverschiedenheiten. Die Entwicklung der einzelnen Verfahren zeigt nun trotz örtlicher und zeitlicher Abgeschlossenheit und trotz der stofflichen Verschiedenheit der Maßgebiete ganz bestimmte einheitliche Umstände, die geradezu zu einer abstrakten Entwicklungsgeschichte verarbeitet werden können. Die einzelnen Stufen dieser Entwicklung sollen hier kurz hervorgehoben werden, da sich aus ihrem Studium leicht die neuen Grundgesetze der Maßlehre ergeben, die den Kern vorliegender Abhandlung ausmachen.

Die Vorstufe aller Messung ist die Schätzung. Ohne besondere Meßmittel beurteilt hier der Mensch die Verschiedenheiten irgendwelcher Dinge. Zu messende Längen schätzt er nach dem Augenmaß; Räume schätzt er mit dem Gesicht, wie auch teilweise mit dem mechanischen Sinn für das Gewicht, indem er das Verhältnis zwischen Raum und Gewicht benützt. Gewichte schätzt er mit seinem Kraftsinn durch Abwägen in der Hand, andrerseits auch durch Beziehung auf den Raumgehalt. Die Methode der Schätzung ist urwüchsig, sie wiederholt sich in allen niedrigen Kulturstufen: bei niedrig stehenden Völkern, bei Kindern und auch in unentwickelten Meßgebieten. Beispielsweise sind wir heute in der Messung des Wertes noch nicht über diese Stufe hinaus und haben auch schlechte Aussicht, in absehbarer Zeit die Wertmessung auf höhere Stufen zu bringen, da die einzelnen die Messung beeinflussenden Umstände viel zu zahlreich sind und außerdem außerordentlich von Fall zu Fall, von Zeit zu Zeit wechseln.

Die Ungenauigkeit der Schätzung fällt sehr bald störend auf. Der nächste Schritt in der Ausbildung der Messung ist die Benutzung von Vergleichsnormen. In der Längenmessung stehen von Natur aus zahlreiche Längentypen zur Verfügung. Zunächst die Ausmaße des menschlichen Körpers: Zoll (Daumen), Fuß, Spanne, Schritt, Elle, Klafter usw. liefern die ersten Längennormen. Häufig sind dann auch Samenkörner, wie Gerstenkorn, Mohnsamen, Dattelkern, als Maß benutzt worden. Für die Flächenmessung ist die Handfläche, für die Raummessung eine „Handvoll" eine derartige der organischen Welt entlehnte Norm. Beim Gewicht griff man wohl zuerst zu Normen aus dem anorganischen Bereich, zu Steinen. Infolge der großen Veränderlichkeit der organischen Normen ging man später ganz allgemein zu anorganischen Normen über. Solange sich aber eine Messung nur als ein Einzelakt auffassen ließ, dessen Grundlagen von Fall zu Fall wechselten und neu gewählt wurden, genügten die organischen Normen, da ihre örtliche und zeitliche Wandelbarkeit in keiner Weise störte. Die beiden Parteien, die bei einer Messung ihre gegenseitigen Wirkungsbereiche abgrenzten, einigten sich anfänglich jedesmal auf die zu benutzende Vergleichsnorm. Nach der Messung hatte die Norm ihren Zweck erfüllt und war erledigt. Bei einer neuen Messung vertrug man sich wiederum auf eine neue anzuwendende Norm. In dieser Phase ist also eine Messung ein örtlich und zeitlich eng begrenzter Vorgang, bei dem daher organische Vertragsnormen völlig genügen.

Beim Fortschritt in der Kultur ist mit dem stärker werdenden Verkehr und der Gruppierung von Einzelwesen zu größeren Menschengruppen mit gleichen Bedürfnissen auch eine

Vermehrung der notwendigen Messungen verbunden. Dabei tritt die Umständlichkeit der einzelnen Messungen immer auffallender in den Vordergrund, und als nächster Schritt in der Ausbildung der Messung zeigt sich die Erweiterung des Geltungsbereiches einer Norm über den Einzelvorgang hinaus in örtlicher und zeitlicher Hinsicht. Die Händler benutzen eine einmal gewählte Norm nicht bloß einmal, sondern immer wieder. Zu Feldmessungen wird allgemein der Fuß angewandt innerhalb der betreffenden Gruppe, in einer anderen etwa der Schritt. Die Norm gilt jetzt für mehrere Messungen, die sich an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten abspielen. Die ganze Messung wird dadurch erheblich vereinfacht, denn es fällt der jedesmalige Vertrag auf die zu wählende Norm weg. Mit dieser Erweiterung des Geltungsbereiches einer Norm sind wir heute keineswegs am Ende. Erst wenn die gesamte Kulturwelt einheitliche Normen anwendet, ist dies der Fall.

Die organischen Normen konnten sich jetzt nicht mehr halten, es kam ihre Veränderlichkeit zur Geltung. Die Genauigkeit der Messungen wurde größer. Die Definition z. B. eines Hohlmaßes „Handvoll" ist ungenügend, da die Hände recht verschieden groß sein können. Es entwickelt sich aus diesem Tatbestand allgemein die Forderung, daß eine Norm genauer bestimmt und ausgeführt sein muß, als man messen kann. Nationale Normen treten nun auf, die durch objektive Festlegung und Bereitstellung von Maßstäben gestützt sind. Die alten Namen werden meist beibehalten, die aus der organischen Stufe stammen. Zoll, Elle, Rute, Klafter usw. werden innerhalb ihres Geltungsbereiches bestimmt realisierte Längenmaße. Allerdings wechseln diese Festsetzungen von Land zu Land, denn die örtliche Erweiterung eines Normbereiches stößt auf die benachbarten, gleichberechtigten Normenbereiche. Es bedarf einer neuen Einigung auf eine einzige Norm, wenn auch diese Zersplitterung ausgeschaltet werden soll. Objektivste Bestimmung der Norm ist hierzu nötig. Heute werden die Pariser Urnormen als objektivste Maße vertreten und auszubreiten gesucht: Urmeter und Urkilogramm.

Eine weitere Quelle zu Zersplitterungen der Messung ist der Umstand, daß man nicht mit einem einzigen Maße für alle Berufe auskommt. Zu Land- und Wegemessungen braucht man ein größeres Maß, der Handwerker braucht ein kleineres, der Feinmechaniker und die Goldindustrie noch kleinere. Die verschiedenen Berufe benützten und entwickelten daher zunächst ihre eigenen Maße ohne Rücksicht darauf, ob sie mit den Maßen anderer Berufe in einfachem Zusammenhang standen und in welchem. Innerhalb der Berufe breiten sich eigenartige Maße aus. Obgleich sich die Berufsmaße anfangs ganz selbständig entwickeln, ist es nicht ausgeschlossen, daß sie allmählich weit über nationale Grenzen hinausgreifen. Die flämische Elle war ein weit verbreitetes Handelsmaß. Die Seemeile ist heute ein internationales Seemannsmaß. Das Karat ist internationales Gewichtsmaß der Goldindustrie geworden. Derartige Berufsmaße sitzen trotz ihrer unbequemen Beziehungen zu anderen allgemeineren Maßen hartnäckig fest. Daß Berufsmaße sich sogar bis zu alleiniger internationaler Geltung hindurcharbeiten können, sehen wir an unserer gegenwärtigen Zeit- und Winkelmessung, die von den alten Astronomen stammen, heute aber unser gesamtes Leben beherrschen.

Im Entstehen und in der Anwendung waren die einzelnen Normen bisher voneinander getrennt. Mit der Verfeinerung der Meßkunst und dem Bedürfnis nach größerer Genauigkeit der Messung wurde es immer schwieriger, die Maße zu objektivieren. Es mußte immer mehr Arbeit auf die Bereitstellung brauchbarer Maßstäbe verwendet werden, die der Messung der Nation oder auch der Berufsmessung zugrunde lagen. Für jedes einzelne Maß, sei es nun Gewicht, Länge, Fläche, Raum usw., wäre die Aufbewahrung einer Urnorm nötig. Und wenn wir die großen Schwierigkeiten bedenken, die wir heute noch mit der Bereithaltung unserer primären und sekundären Urmeter und Urkilogramme haben, so sehen wir leicht ein, daß dieser Umstand hinreichend Anlaß bot, nach einer Erleichterung Ausschau zu halten. Diese fand sich durch den für die weitere Entwicklung äußerst wertvollen Gedanken, die Beziehungen der verschiedenen isolierten Maße desselben Gebiets, z. B. der Gewichtsmaße, genau festzulegen, so daß sich mit Hilfe dieser Verhältnisse sämtliche Maße desselben Gebiets auf eine einzige Urnorm beziehen ließen, alle Längenmaße z. B. auf ein einziges. Andrerseits führte auch die Praxis zu diesem Wege, denn die einzelnen Berufsmaße eines Landes griffen immer mehr über ihren Bereich hinaus, so daß eine genaue Feststellung der Verhältnisse, etwa der Maße der Handwerker und der Feldmesser, immer notwendiger wurde. Wir stehen hier am Anfang der Systembildung. Es werden die einzelnen isolierten gleichartigen Maße zu einem Maßsystem vereinigt. So bilden sämtliche in einem Lande angewandten isolierten Gewichtsmaße zusammen ein Gewichtssystem einfachster Art. Dieser Zusammenschluß gleichartiger

Maße ist die nächste Stufe der Maßentwicklung. Zunächst leitet sie sich ungeordnet ein, bis sich bald auch hier ganz bestimmte Ordnungsgrundsätze einstellen. Am Ende dieser Phase hat sich dann die Spaltung in „Urnorm" und „System der abgeleiteten Maße" gänzlich vollzogen. Jedes Maßgebiet besitzt mindestens eine Urnorm, auf deren Konstanthaltung und Bereitstellung nun größte Sorgfalt zu verwenden ist, während alle übrigen gleichartigen Normen lediglich durch ihre genaue Größenbeziehung zur Urnorm, also durch Zahlen bestimmt sind, je nach der Entwicklung der Systematik allerdings in mehr oder weniger einwandfreier Weise. Urmeter und metrisches Längenmaßsystem, Urkilogramm und metrisches Gewichtssystem sind Beispiele für diese durchgreifende Trennung von Urnorm und System. Die Systematik steht hier schon auf einer ziemlich hohen Stufe, die bisher wohl als ideal betrachtet wurde. Im weiteren Verlaufe wird aber gezeigt werden, wie auch die metrische Systematik noch entwicklungsfähig ist. Weniger entwickelte Beispiele für die Systembildung liegen in der Winkelmessung vor mit dem Vollwinkel als Urnorm, Graden, Minuten und Sekunden als abgeleitete Normen, und in der Zeitmessung mit dem Tag als eine Urnorm, Stunden, Minuten und Sekunden als abgeleitete Normen.

Auch die Systembildung zeigt Entwicklungsstufen. Die nächstliegende haben wir vor uns, wenn die isolierten Maße eines Maßbereiches, so wie sie eben in einer Volksgruppe vorhanden sind, zu einer Gesamtheit vereinigt werden. Bei der anfänglichen Ungenauigkeit der Messung läßt sich auf dieser Stufe fast immer erreichen, daß die Zahlenverhältnisse dieser Normen untereinander durchgängig ganze Zahlen sind; indes werden auch Brüche nicht immer vermieden, sie verschwinden erst in der weiteren Entwicklung. In dem Bestreben, ganze Zahlen für die Verhältnisse innerhalb eines Maßsystems zu bekommen, haben wir das erste Leitgesetz für die bewußte Systembildung gefunden.

Der nächste Fortschritt äußert sich in der Wahl eines einzigen Zahlenverhältnisses zwischen mehreren, wenn möglich sogar zwischen allen Maßen der einzelnen Meßgebiete. China besitzt offiziell ein reines dezimales Längenmaß- und Gewichtssystem. Das auf dem Pariser Fuß aufgebaute Fuß—Zoll—Linie—Punkt-System, das in der Wissenschaft lange Zeit benutzt wurde, ist ein reines Zwölfersystem. Daneben bestand aber in fast allen den Fuß benutzenden Ländern auch noch die Unterteilung des Fußes mit Hilfe der Zehn. Alle Willkür in der Systembildung wird immer mehr eingeengt, sie beschränkt sich letzten Endes auf eine einzige Wahl für ein jedes System, nämlich auf das in ihm herrschende einzige Zahlenverhältnis.

Die Systembildung besteht zunächst darin, daß von einer Hauptnorm größere und kleinere Maße abgeleitet werden. Auf diese Weise können auch ganz neue Normen gewonnen werden, ohne daß sie auf ältere isolierte Maße zurückgehen. Die Zahlen Zwölf, Zehn, hie und da auch noch die Acht, bildeten die hauptsächlich benutzten Verhältnisse. Vor allem bei der Vervielfältigung der Hauptnorm zu größeren Maßen bestand größte Willkür. Alle kleineren Zahlen sind irgendwo einmal als Verhältnis zwischen zwei Maßen benutzt worden. Jede Längenmaßtabelle zeigt, daß alle Zahlen bis zur Siebzehn gegenwärtig noch benutzt werden. Persien: 1 Ser von Täbris = 17 Girre. Die Freiheit, die der Menschheit für die Auswahl des zahlenmäßigen Zusammenhangs mehrerer Maße zur Verfügung stand, ist also auch hinlänglich benutzt worden. Diese Freiheit ist mit anderen Worten eine Zersplitterungsstelle für die Entwicklung der Maßsytematik geworden. Von Natur aus besteht keinerlei Hinweis oder Anhalt für die Wahl eines bestimmten Zahlenverhältnisses zur systematischen Ableitung der einzelnen Maße von der Hauptnorm. Daher ist überall auch aus nebensächlichen Gründen ein willkürliches gewählt worden. Zufällige örtliche und zeitliche Verhältnisse werden meist den Ausschlag gegeben haben. Eine Kulturtat, deren Wert heute kaum von der Fachwelt recht eingeschätzt wird, ist es nun gewesen, als man die fortschrittliche Forderung aufstellte, daß nur ein einziges Zahlenverhältnis innerhalb eines Meßbereiches herrschen soll. Alle verschiedenen Maße sollen gleichvielmal kleiner sein als das nächstgrößere. Es bleibt dabei immer noch dieses eine Zahlenverhältnis beliebig wählbar. Durch diesen neuen Satz wird eine große Zersplitterung geordnet.

Für jedes Maßgebiet könnte man nun zunächst eine eigene Zahl wählen. Man könnte die Längenmaße etwa auf Zehn, die Zeitmessung etwa auf Acht, die Gewichte auf Zwölf usw. aufbauen. Offenbar aber ist dies eine neue Zersplitterung, deren Nachteile sich bald bemerkbar machen würden. Es sind demgemäß nun die verschiedenen Systeme, wie vorher die einzelnen Maße desselben Systems, unter einheitliche Grundsätze zu ordnen. Auch diese Ausgestaltung einer umfassenden Systematik geht schrittweise vor sich. Wir kennen heute Teillösungen der Aufgabe, wie das metrische Maß- und Gewichtssystem,

die Münzabkommen, das absolute Maßsystem der Physik, Chemie und Technik, das metrische Formatsystem u. a. Es fehlt aber bisher noch die klare Ausarbeitung der Grundlagen für die systematische Weiterentwicklung. Die einzelnen Normierungen werden von einem einheitlichen Band umfaßt, es ist dies die Beherrschungsart der Mengen schlechthin. Wir können die Entwicklung spezieller Normierungen nicht eher weiter verfolgen, als bis wir uns über den Aufbau unseres Zahlengebäudes gründlich Rechenschaft abgelegt haben.

Mengenmessung

Wie beherrschen wir die Mengen ganz allgemein, nicht bestimmte Mengen von Längen oder Gewichten, sondern eben schlechthin die Mengen von irgendwelchen Dingen, beziehungslose Mengen? Man ist von vornherein der Ansicht, daß die Art und Weise, wie wir diese beherrschen, ohne weiteres auch auf die Beherrschung besonderer Mengen übertragen wird, denn diese sind ja eben die wirklichen Beispiele von Mengen, welche zu beherrschen sind. Wenn uns diese Ansicht auch selbstverständlich erscheint, so werden wir sie doch wesentlich ändern müssen. Aus der Vergleichung von Mengen haben sich bekanntlich die Zahlen und weiterhin die Zahlensysteme entwickelt. Die gegenwärtige Zählmethode ist das Ergebnis jahrtausendelanger fortwährender Entwicklung, die von schlichten Anfängen an bis zu einem einwandfreien Gebäude vor sich gegangen ist. In unserem Zählsystem liegt ein weitgehend internationales Gebilde vor, das Anrecht auf allgemeine Annahme seiner günstigsten Brauchbarkeit wegen hat. In dieser Beziehung steht es vorbildlich anderen ebenfalls internationalen Normierungen, z. B. der Zeitmessung gegenüber, die trotz größter Umständlichkeit sich doch durchgängige weltumfassende Geltung zu verschaffen gewußt haben. In der Mengennormierung werden wir daher ein vollendetes Beispiel für Normierungen kennen lernen, dessen genaueres Studium uns erst vielerlei Einzelheiten im Bau der besonderen Normensysteme verständlich machen wird, so daß wir darauf weiter bauend dann zu einem übersichtlichen allgemeinen Normierungsplan kommen.

Für die kleinen Mengen bilden sich Gesamtbegriffe. Das Bild von drei Stück hat sich selbständig dem Gedächtnis eingeprägt, geradeso wie das Bild des Baumes. Ebenso der Anzahlsbegriff der Vier. Wie groß die Anzahl ist, die noch als eine selbständige Vorstellung erfaßt werden kann, dürfte sehr verschieden sein. Mancher Schäfer weiß, wieviel er Schafe hat, ohne jedoch einen Zahlbegriff im üblichen Sinne dafür zu haben. Seine Beherrschung der Menge fußt auf wesentlich anderen Gesichtspunkten als die unsere. Der Schäfer läßt seine Herde an sich vorbeiziehen, und aus dem verarbeiteten Eindruck weiß er, ob es alle sind, und sogar welches fehlt. Ein allgemeines Mittel gibt es, gewisse größere Mengen mit einem Blick zu überschauen und anschaulich zu erkennen, ob die Menge vollständig ist, nämlich besondere Anordnung dieser Menge. Sind z. B. 36 Stück in ein Quadrat geordnet, so erkennt man auf den ersten Blick, wenn ein Stück weggenommen oder hinzugelegt wurde, ohne daß eine Abzählung nötig ist. Derartige Verfahren der Mengenbeherrschung sind aber an bestimmte Umstände gebunden und können nicht auf die allgemeinen Mengen übertragen werden. Es sind dies den Berufsmaßen und Berufsverfahren vergleichbare individuelle Beherrschungsarten. Vor allem wird ihrer Anwendung letzten Endes durch das Größerwerden der zu beherrschenden Menge ein Ziel gesetzt. Dieses Verfahren der Zählung ist nicht unabhängig genug von der Größe der zu messenden Menge.

Den kleinen, von allen Menschen leicht lernbaren anschaulichen Gesamtzahlbegriffen sind im Alltagsleben sehr bald Worte zugeordnet worden, selbständige Worte, die den selbständigen voneinander verschiedenen Begriffen entsprechen. Wenn wir zählen: eins, zwei, drei .... neun, zehn, elf, zwölf bewegen wir uns selbst noch, wenigstens bei den ersten Zahlen, in dieser Art des Zählens. Allerdings haben wir hier schon eine ganz bestimmte Reihenfolge benutzt, in die wir die verschieden großen Mengen übersichtlich ordnen, ein Mittel, das ganz vergleichbar ist der Anordnung einer gewissen Menge etwa in ein Quadrat. Wir haben hier schon einen nächsten Schritt getan und mehrere Zahlbegriffe zu einer Gesamtheit vereinigt, die eben die verschiedenen Mengen umfaßt. Es handelt sich für uns darum, in diesen Wust verschieden großer Mengen Ordnung hineinzubringen. Es ist ein großer Schritt vorwärts, sobald man lernt, diese vielerlei Größen dadurch zu ordnen, daß man ihr gegenseitiges Unterscheidungsmerkmal, eben ihre Größe, als Ordnungsmittel benützt. Man ordnet sie der Größe nach und findet die natürliche Zahlenreihe. Jede um Eins größere Menge erhält einen neuen Namen und ein neues Kennzeichen, die beide für immer dem durch sie dargestellten Zahlbegriff zugeordnet bleiben. Nur ist hier wieder derselbe Umstand ein unüberwindliches Hindernis wie oben, nämlich daß die

wachsende Anzahl der neuen individuellen Begriffe bald zu einer Verwirrung führt und Unübersichtlichkeit bedingt. Eine derartige Reihe beherrscht man nur wenig weit und kann sie nur in ihren Anfängen richtig anwenden. Die Aufstellung einer Ordnung hat also auf den ersten Blick keinen allzu großen Fortschritt in der Beherrschung der Mengen gebracht, abgesehen davon, daß die Reihe vollzählig gemacht wurde, indem man zwischen Zahlbildern, die sich um mehr als eine Einheit unterschieden, die fehlenden einschob. Die jenseits der Grenze der beherrschbaren Mengen liegenden Anzahlen fallen jederzeit unter den Sammelbegriff „ungeheuer groß".

(Fortsetzung folgt.)

Bemerkung zum Aufsatz des Herrn W. Kramer: „Über die Verwertung des Spiegelbildes in der Photogrammetrie"[1].

Von der Inspektion für Waffen und Gerät in Berlin (Dr. H. Kochan).

Verfasser zeigt, daß man zur photogrammetrischen Bestimmung der Meßverhältnisse eines Gegenstandes mit nur einem Photogramm auskommt, sobald dieses ein Spiegelbild des zu messenden Gegenstandes mit enthält. Er bemerkt dazu, daß dieser Fall bisher nicht betrachtet worden zu sein scheint; diese Annahme ist irrig.

Das Problem wird bereits in dem „Internationalen Archiv für Photogrammetrie" Band III, Heft 2 vom Juni 1912 und Heft 4 vom April 1913 von Dolezal ausführlich behandelt. Dolezal macht in seinen Aufsätzen auch ausführliche Literaturangaben. Danach hat Pulfrich schon 1905 in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde", XXV. Jahrg., Heft 4 vom April 1905 einen Aufsatz: „Über die stereoskopische Betrachtung eines Gegenstandes und seines Spiegelbildes" veröffentlicht. Hierher gehört auch ein Fall, den Dolezal 1902 in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie III, 56, 1902 beschreibt. Der Aufsatz ist betitelt: „Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkt bei Verwendung der Reflexe". Verfasser zeigt darin, daß man die Reflexbilder von Wolken, welche sich mit den Originalen auf einer Platte befinden, zu Wolkenhöhenmessungen benutzen kann.

1) Diese Zeitschr. **22**, 24, 1921.

(Eingegangen 19. April 1921.)

Berichtigung.

In der Mitteilung über gleitende Reibung von S. Fuchs (Nr. 6 dieses Jahrgangs) soll auf S. 175 die Formel (6) lauten:

$$\text{statt } (\lambda_1 + \lambda_2)\, FU,$$

$$\text{richtig } \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\, FU.$$

Tagesereignisse.

Deutscher Physiker-Tag in Jena.

Einladung.

In der Woche vom 19.—24. September findet in Jena, an Stelle der in diesem Jahre ausfallenden Naturforscherversammlung, eine gemeinsame Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Deutschen Gesellschaft für Technische Physik statt. Anmeldungen zu Vorträgen bitten wir möglichst vor dem 1. Juli an den Vorsitzenden des Ortsausschusses Professor M. Wien, Physikalisches Institut, Jena, Am Landgrafen 10, mit dem Vermerk: Deutscher Physiker-Tag (D. Ph. T.) zu richten.

Gleichzeitig wird die Deutsche Mathematikervereinigung und die Fachgemeinschaft Deutscher Hochschullehrer der Physik in Jena tagen, unmittelbar vorher die Bunsengesellschaft und die Helmholtzgesellschaft.

Das Programm und sonstige Angaben über die Tagung werden im Juli bekannt gegeben.

Der Vorstand der Deutschen Physikalischen Gesellschaft.

Der Vorstand der Deutschen Gesellschaft für Technische Physik.

Der Jenaer Ortsausschuß.

Das Rektorat der Technischen Hochschule in Wien schickt uns zur Veröffentlichung folgende „Notbitte": Die ungeheure Bücherteuerung in Österreich macht es besonders der Bibliothek der Technischen Hochschule in Wien unmöglich, von den Neuerscheinungen auf technischem, mathematischem, natur- und kunsthistorischem Gebiete auch nur die allerwichtigsten Werke anzukaufen. Es ergeht daher an alle auf diesen Gebieten schriftstellerisch Tätigen die herzliche Bitte, dieser für den wirtschaftlichen und kulturellen Aufbau Österreichs so wichtigen Bibliothek je ein Stück ihrer neuen Werke geschenkweise oder doch zu wesentlich geminderten Preisen zu überlassen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Leipzig Dr. Ludwig Schiller für Physik, an der Bergakademie Clausthal Dr. N. Halbertsma für Lichttechnik.

Ernannt: Der Observator an der Sternwarte Babelsberg Professor Dr. Paul Guthnick zum Direktor derselben, A. G. Lobley zum Dozent für Elektrochemie an der Universität Manchester.

Verliehen: Dem Privat- und Honorardozenten für höhere Mathematik und Geometrie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Erwin Kruppa der Titel a. o. Professor.

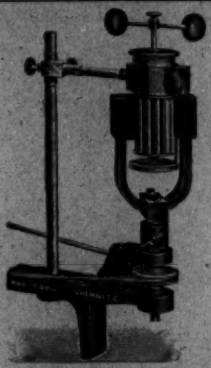
Vom Lehramt zurück: Der Professor der Chemie am Armstrong College Newcastle Philips Bedson, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Gießen Dr. Hans Freiherr v. Liebig.

Gestorben: Der Assistent für Chemie an der Universität Cambridge Dr. Richard Henry Vernon, der Direktor des Smith-Observatoriums in Geneva bei New York Professor William Robert Brooks, der emeritierte Professor für technische Chemie am Royal Glasgow Technical College Edmund James Mills, der Professor der Chemie an der Rangoon Universität (Indien) Albert Ernest Beilars.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 2400000.



32 060. Modell eines Kurzschlussankers nach Friedr. C. G. Müller, für die Schwungmaschine.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Optische Anstalt

C. P. Goerz A.-G.

Abt. Scheinwerferbau

Leutzsch bei Leipzig

Projektionsapparate

•

Ablesefernrohre
mit
Autokollimation

Goerz-Bogenlampen

mit **erhöhter** Helligkeit für Projektion, Kinematographie, Mikroskopie, Reproduktions- und Aufnahme-Ateliers, Therapie usw.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. — Zusammenfassende Bearbeitungen.)

Seite

Bennewitz, K., Verfahren zur Kompensation der elastischen Nachwirkung 329
Biehle, J., Das Glockenmirakel von Wehlen . . . 337
Dingler, H., Über die Eigenschaften des Begriffes „Gesamtphysik" 332
Dorno, C., Himmelshelligkeit, Himmelspolarisation und Sonnenintensität in Davos 1911—1918. (B.) . . 342
Drosselerscheinung: Die Genauigkeit der Zustandsbeobachtungen und die Berechnung der Umkehrpunkte der —, v. K. Schreber 335
Elastische Nachwirkung: Verfahren zur Kompensation der —, v. K. Bennewitz 329
Elemente: Werte der erdmagnetischen — an deutschen Hochschulorten für den Zeitpunkt 1921.5., v. A. Schmidt 334

Seite

Flüssigkeitswiderstand: Neuere Feststellungen über die Gesetze des — und Luftwiderstandes, v. C. Wieselsberger 321
„Gesamtphysik": Über die Eigenschaften des Begriffes —, v. H. Dingler 332
Glockenmirakel: Das — von Wehlen, v. J. Biehle 337
Himmelshelligkeit, Himmelspolarisation und Sonnenintensität in Davos 1911—1918, v. C. Dorno. (B.) 342
Himmelspolarisation: Himmelshelligkeit, — und Sonnenintensität in Davos 1911—1918, v. C. Dorno. (B.) 342
Laue, M. v., Theoretisches über neuere Beobachtungen zur Relativitätstheorie. (Nachtrag.) 332
Luftwiderstand: Neuere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und —, v. C. Wieselsberger . 321

(Fortsetzung auf Seite III.)

PHYSIKER

für ein wissenschaftlich-technisches Versuchslaboratorium in Berlin gesucht. Offerten mit ausführlichen Angaben über Lebenslauf, Studiengang, bisherige Tätigkeit und Eintrittstermin unter **S. H. 579** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Carl Schleicher & Schüll
Düren, Rheinland

Schutz Marke
Skizzir- Profil- Papier.

empfehlen

Millimeter-, Koordinaten-, Logarithmen-, Sinus- und Windrosenpapiere in anerkannt feinster u. vielseitigster Ausführung
Blätter f. Registrierapparate
aller Art

Neuheit: Unser Handbuch: **Graphische Papiere und ihre vielseitige Anwendung**, bearbeitet von Prof. Dr. W. Grosse, Direktor des Meteorolog. Observatoriums Bremen
Preis Mark 15.— das Buch ab Fabrik.

Gebr. Ruhstrat
Göttingen O 3

Schalt tafeln

Meß- instrumente

Widerstände

Experimentiertische
Verdunklungseinrichtungen
Unterrichtsapparate